



Conception d'un actionneur prismatique rétractable

Mémoire

Clémence Servant

Maîtrise en génie mécanique - avec mémoire
Maître ès sciences (M. Sc.)

Québec, Canada

Conception d'un actionneur prismatique rétractable

Mémoire

Clémence Servant

Sous la direction de:

Philippe Cardou, directeur de recherche
Stéphane Caro, codirecteur de recherche

Résumé

Les robots parallèles entraînés par câbles (RPEC) permettent d'augmenter grandement l'espace de travail. Cependant, il est possible d'améliorer le ratio entre le volume de travail utile d'un RPEC et son volume replié en concevant un système capable de se rétracter pour laisser la place à d'autres types d'activités.

L'objectif de ce mémoire consiste à concevoir un actionneur prismatique rétractable maximisant le volume de travail et résistant au flambage. Notre système est composé de deux chaînes de maillons qui s'emboîtent l'une dans l'autre à l'aide d'un guide convergent afin de former une poutre rigide. A l'extrémité de cette poutre, trois câbles sont implantés afin de la maintenir en compression et un effecteur pourrait être installé. Dans un premier temps, nous avons présenté le système dans son ensemble, déterminé le volume de travail à maximiser ainsi que les contraintes à respecter. Nous avons sélectionné et dimensionné le système d'emboitement des maillons : les *snap-fits*. Ensuite, nous avons conçu une crémaillère intégrée aux maillons et les engrenages permettant de translater et assembler ces deux chaînes. Nous avons alors paramétrisé notre système afin de l'optimiser pour obtenir un volume de travail maximal. Enfin, nous avons conçu les réservoirs accueillant les deux chaînes et réalisé le prototype. Cela nous a permis de mesurer le rapport du volume de travail sur le volume rétracté égal à 11,58, ce qui signifie que nous avons atteint notre objectif. Nous avons testé la résistance au flambage du système qui pourrait être améliorée en corrigeant les jeux entre les maillons.

Table des matières

Résumé	ii
Liste des figures	v
Liste des tableaux	viii
Remerciements	ix
Introduction	1
1 Description d'ensemble du concept de robot proposé	8
1.1 Présentation du système	8
1.2 Définition du volume de travail	9
1.3 Force critique d'Euler	11
1.4 Flambage de la poutre non soumise à son poids	13
1.5 Contraintes de flexion et de compression de la poutre soumise à son propre poids	14
2 Conception des maillons et du guide	19
2.1 Résistance des matériaux	19
2.1.1 Présentation des sections étudiées	19
2.1.2 Sélection de la forme de la poutre	22
2.2 Géométrie des maillons et conception de leurs liaisons	22
2.3 Système d'emboîtement des maillons	24
2.3.1 Choix du système d'emboîtement des maillons	24
2.3.2 Dimensionnement des <i>snap-fits</i>	26
2.4 Choix du convergent et modélisation CAO	28
2.4.1 Découpe du guide	29
2.4.2 Vérification des collisions	31
3 Conception du mécanisme d'engrènement	33
3.1 Choix du système d'engrènement	33
3.2 Conception de la crémaillère intégrée aux maillons et contraintes associées	34
3.3 Conception de l'engrenage	41
3.3.1 Interférence de taillage	41
3.3.2 Coefficient de déport	41
3.3.3 Conditions géométriques d'engrènement	44
3.3.4 Développante de cercle	46

3.4	Assemblage	48
4	Optimisation des paramètres du robot	50
4.1	Fonction à optimiser : détermination du volume de travail	50
4.2	Présentation des variables à optimiser et celles qui sont fixées	50
4.2.1	Variables de la poutre	51
4.2.2	Variables des maillons	52
4.2.3	Variables du guide	53
4.3	Contraintes	55
4.3.1	Logement maillons emboîtés	56
4.3.2	Logement maillons	56
4.3.3	Collision entre les maillons femelles et le guide	56
4.3.4	Collision entre les maillons mâles et le guide	63
4.3.5	Découpe du guide et détermination des points d'intersection	66
4.3.6	Longueur de la poutre déployée	69
4.3.7	Débattement angulaire γ autour de l'axe y	70
4.3.8	Contraintes efforts	73
4.4	Problème d'optimisation	75
4.5	Implantation Matlab	75
4.6	Résultats finaux et vérification	76
5	Conception du réservoir	78
5.1	Conception du premier réservoir	78
5.1.1	Modélisation CAO sans orientation	79
5.1.2	Modélisation CAO avec orientation	79
5.1.3	Problèmes rencontrés	80
5.2	Conception du prototype	81
5.2.1	Modification des liaisons entre les maillons	81
5.2.2	Conception du réservoir et des liaisons entre le réservoir et le guide	82
5.2.3	Enroulement des chaînes dans le réservoir	83
5.2.4	Implantation des câbles	86
5.3	Résultats	88
5.3.1	Rapport du volume de travail V_w sur le volume rétracté V_r	88
5.3.2	Résistance de la poutre au flambage	90
5.4	Discussion	92
5.4.1	Rapport du volume de travail V_w sur le volume rétracté V_r	92
5.4.2	Résistance de la poutre au flambage	93
	Conclusion	95
	A Dimensionnement des <i>snap-fits</i> : leviers en porte à faux	98
	B Conditions géométriques d'engrènement	100
	C Dimensionnement du système	102
	Bibliographie	107

Liste des figures

0.1	Exemples de robots à câbles	1
0.2	Schéma représentant le volume rétracté et le volume de travail	2
0.3	Structure déployable contrôlée par des câbles actifs et passifs : a) idée générale b) pont pliable	3
0.4	Manipulateur parallèle commandé à l'aide de câbles (15)	4
0.5	Poutre rétractable s'inspirant du principe de la fermeture éclair utilisant des chaînes : le Zippermast (13)	5
0.6	Poutres rétractables s'inspirant du principe de la fermeture éclair utilisant des bandes flexibles : le Spiral Zipper de 57mm de diamètre, commençant à se déployer (à gauche) et complètement déployé (à droite) (4)	6
0.7	Poutres rétractables s'inspirant du principe de la fermeture éclair utilisant des chaînes	7
1.1	Schéma du système	8
1.2	Schéma du système avec un effecteur	9
1.3	Schéma du volume	10
1.4	Diagramme de corps libre de la poutre	11
1.5	Schéma câbles	14
1.6	Schéma des contraintes	15
1.7	Diagramme représentant la contrainte en compression	16
1.8	Diagramme représentant la contrainte de cisaillement	16
1.9	Diagramme représentant la contrainte du moment de flexion pour $y = \frac{l_p}{2}$	17
1.10	Schémas représentant la section de la poutre soumise aux contraintes de flexion et de compression	17
2.1	Assemblage des maillons	22
2.2	Maillons en forme de U	23
2.3	Liaisons entre les maillons	23
2.4	Liaisons entre les maillons	24
2.5	Définition du <i>snap-fit</i> (2)	24
2.6	Liaison annulaire	25
2.7	Liaison torsion	25
2.8	Liaison en porte à faux	26
2.9	Images extraites de Bayer MaterialScience	26
2.10	Simulation en éléments finis du levier en porte-à-faux d'un maillon en U	28
2.11	Partie linéaire du guide	29
2.12	Modélisation du guide composé d'une partie circulaire	29
2.13	Modélisation du guide avec le réservoir	30

2.14	Ébauche du guide	31
2.15	Interférences des chaînes mâle et femelle, et position des points A et B	31
2.16	Trajectoire des points A et B	32
3.1	Configurations du système à pignon et crémaillère	35
3.2	Espacement entre les maillons	36
3.3	Géométrie de la crémaillère	36
3.4	Schéma du fond d'une dent	37
3.5	CAO des maillons	40
3.6	Effet du déport sur la géométrie de l'engrenage (22)	42
3.7	Effet du déport sur la ligne de référence de l'engrenage (22)	42
3.8	Dentures avec déports négatif, nul et positif, ayant le même cercle primitif de référence et le même cercle de base (22)	43
3.9	Recommandations ISO pour la somme des déports (22)	43
3.10	Déport de la ligne de référence de la crémaillère	44
3.11	Détermination du rapport de conduite (6)	45
3.12	Développante de cercle	47
3.13	Position des roues dentées	48
3.14	Vue éclatée du système	49
4.1	Schéma de la poutre paramétrée	52
4.2	Schéma de la pièce mâle	53
4.3	Schéma de la pièce femelle	53
4.4	Schéma du guide	54
4.5	Schéma découpe du guide	55
4.6	Schéma du guide et contraintes étudiées	56
4.7	Schéma du guide et paramétrisation des bordures	57
4.8	Schéma du guide et paramétrisation du point B_1	58
4.9	Schéma du guide et paramétrisation du point C_1	58
4.10	Schéma du guide et paramétrisation du point B_2	59
4.11	Schéma du guide et paramétrisation du point C_2	59
4.12	Schéma du guide et variable intermédiaire v_{i1}	60
4.13	Schéma du guide et variable intermédiaire L_2	61
4.14	Schéma du guide et variable intermédiaire $y_{R'}$	62
4.15	Schéma du guide et variable intermédiaire $x_{R'}$	62
4.16	Schéma du guide et paramétrisation des bordures	64
4.17	Schéma du guide et variable intermédiaire R_3	65
4.18	Schéma découpe guide intersection	67
4.19	Schéma du guide et longueurs associées	70
4.20	Schéma simplifié du système	71
5.1	Schéma du réservoir	78
5.2	Schéma du réservoir sans orientation	79
5.3	Schéma du réservoir avec orientation	80
5.4	Modification des liaisons entre les maillons	81
5.5	Montage de deux maillons avec la nouvelle modélisation du croisillon	82
5.6	Schéma simplifié du second réservoir	82
5.7	Modélisation du second réservoir	83

5.8	Collision entre les maillons et le réservoir	84
5.9	Cassure lors de l'enroulement des maillons femelles dans le réservoir	84
5.10	Rampe permettant l'enroulement des maillons mâles jusqu'au réservoir	85
5.11	Cassure au niveau des maillons mâles à la sortie du guide	85
5.12	Pièce montable sur le guide pour faciliter l'enroulement de la chaîne mâle dans le réservoir	86
5.13	Pièces situées à l'extrémité de la poutre permettant l'implantation des câbles	87
5.14	Poutre déployée en utilisant quatre câbles en tension	87
5.15	Schéma des paramètres mesurés pour le calcul du volume de travail	88
5.16	Modélisation du robot en position "repos"	89
5.17	Modélisation simplifiée du robot en position "repos"	90
5.18	Poutre déployée (vue de côté)	91
5.19	Poutre déployée (vue de face)	91
5.20	Flambage de la poutre	92
5.21	Jeux entre les maillons causant le flambage de la poutre	93
5.22	Jeux entre les maillons causant la flexion de la poutre	93
A.1	Dimensionnement des <i>snap-fits</i> : leviers en porte à faux	99
B.1	Grandeurs géométriques des roues cylindriques droites à dentures déportées (22)	100
B.2	Caractéristiques géométriques d'une denture extérieure déportée	101
C.1	Modélisation du second réservoir	102
C.2	Diagramme de corps libre du réservoir du haut	104
C.3	Diagramme de corps libre du réservoir du bas	105

Liste des tableaux

2.1	Sections étudiées	20
2.2	Sections étudiées (suite)	21
3.1	Angle en fond de dent	38
3.2	Valeurs de L_d en fonction de Z_c	40
3.3	Valeurs des paramètres de l'engrenage	46
4.1	Valeurs initiales des variables	76
4.2	Bornes utilisées pour les variables	76
4.3	Volume de travail V_w en fonction de la distance entre les câbles h_p	76
4.4	Résultats des variables pour $h_p = 750$ mm	77
5.1	Résultats des paramètres mesurés	89

Remerciements

D'abord, je tiens à remercier mon directeur de recherche, Philippe Cardou, pour m'avoir laissée la chance d'effectuer ma maîtrise dans le domaine de la robotique, et pour m'avoir accompagnée et soutenue durant toute la durée de mon projet de recherche. J'adresse également mes remerciements à mon codirecteur de recherche, Stéphane Caro, pour ses conseils pertinents et sa disponibilité. Ce fût un plaisir de travailler avec vous.

Je remercie également Thierry Laliberté pour m'avoir conseillée lors de l'impression 3D et pour avoir imprimé le guide convergent. Je remercie aussi Simon Foucault de m'avoir aidée lors de l'installation du prototype.

Je tiens aussi à remercier Barthélémy Carrasco et Josiane Doris Kougou-Ayounet, étudiants que j'ai supervisés durant ma maîtrise et qui ont participé à mon projet de recherche, pour leurs précieuses contributions.

Je remercie également mon conjoint pour m'avoir soutenue durant ma maîtrise et avoir participé au montage du prototype ainsi qu'à la prise de mesures.

Introduction

Mise en contexte

Les robots parallèles entraînés par câbles (RPEC) sont un type de manipulateurs parallèles utilisant des câbles flexibles qui assurent la transmission. Sur chacun des câbles, une des extrémités est enroulée et contrôlée par un moteur tandis que l'autre extrémité est reliée à l'effecteur. Ainsi, il est possible d'utiliser de longs câbles occupant très peu d'espace lorsqu'enroulés, ce qui augmente grandement l'espace de travail. De plus, les câbles utilisés sont beaucoup plus légers que les liaisons rigides classiques, l'effecteur peut donc atteindre des vitesses et des accélérations élevées. Parmi les systèmes de RPEC, nous pouvons citer le SkyCam, qui est un système de caméra utilisé lors des événements sportifs, notamment dans les stades de football, mis au point par G. Brown en 1987 (3). Il est actionné à l'aide de trois câbles permettant de positionner la caméra dans la direction voulue. Le radiotélescope FAST (Five hundred meter Aperture Spherical Telescope) mis en service en Chine en septembre 2016 est également un RPEC. Le collecteur est suspendu à six tours et peut être déplacé en modifiant la longueur des câbles afin de le positionner et de l'orienter dans la pose souhaitée. Ces deux systèmes sont représentés à la figure 0.1.



(a) Le robot SkyCam durant un match à AT&T Stadium (© James D. Smith via AP)



(b) Le radiotélescope FAST (© Jeff Dai (TWAN))

FIGURE 0.1 – Exemples de robots à câbles

Objectifs généraux

Cependant, il serait possible d'améliorer le ratio entre le volume de travail utile d'un RPEC et son volume replié en concevant un système capable de se rétracter pour laisser la place à d'autres types d'activités. Cela permettrait d'utiliser les RPEC non seulement pour capter des ondes électromagnétiques, comme c'est le cas pour la SkyCam et le télescope FAST, mais aussi pour interagir directement avec son environnement. Pour contrôler les mouvements d'un robot parallèle entraîné par câbles, il est nécessaire de diriger des câbles dans plusieurs directions opposées. Cela engendre souvent des interférences avec d'autres objets présents dans le volume de travail du robot mais également avec des personnes, ce qui exclut les RPEC de plusieurs applications où ils pourraient être utiles.

L'utilisation de câbles flexibles permet aux RPEC d'augmenter considérablement leur espace de travail tout en conservant des vitesses et accélérations élevées. Ce type de mécanisme est utilisé dans l'industrie et est également bien adapté à la coopération humain robot d'où la nécessité de concevoir une poutre rétractable. En effet, la maximisation du volume de l'espace de travail est un enjeu clé des industriels car il permet d'augmenter la productivité ainsi que l'aspect sécuritaire. Un actionneur prismatique rétractable serait fixé sur un mur et serait opposé à des câbles. Ces câbles s'enrouleraient sur le même mur, ce qui permettrait de maintenir l'actionneur en tension. Lorsque le robot serait rétracté, l'espace occuperait un seul et même côté de l'espace de travail. Il n'y aurait donc pas d'interférence avec d'autres objets, comme les câbles accrochés au plancher ou au plafond. Ce système permettrait alors de maximiser le rapport des volumes de l'espace de travail et de l'espace rétracté comme le montre la figure 0.2. L'utilisateur d'un tel robot pourrait ainsi prévoir un autre usage de cet espace lorsque le robot est inutilisé. Le but consiste à concevoir un système abordable, imprimable en 3D et facile à installer.

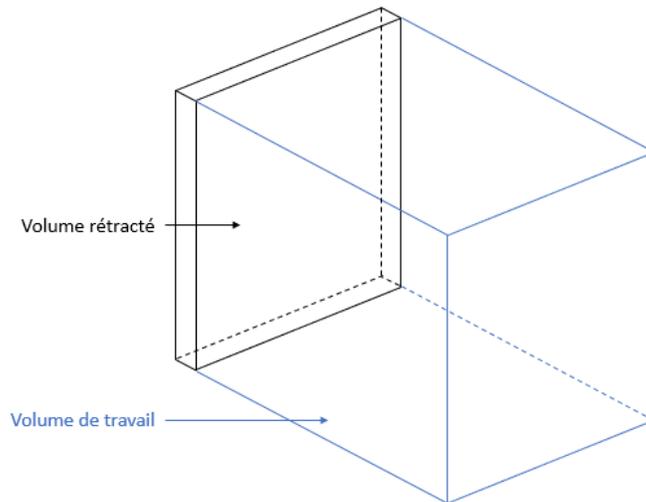


FIGURE 0.2 – Schéma représentant le volume rétracté et le volume de travail

Revue de littérature

L'objectif est de concevoir un système dont le ratio du volume de l'espace de travail sur le volume du système rétracté est aussi grand que possible. Afin de concevoir un actionneur prismatique rétractable, il est important d'étudier la littérature associée pour dégager les principales techniques de conception ainsi que les avantages et inconvénients de ce type de systèmes. Les structures déployables répondent à cette problématique car elles permettent de passer d'une configuration où le volume du système est minimisé à une configuration où la structure extensible est déployée et dont le volume de travail est grand. I. Doroftei (5) et A. Spinos (26) détaillent les structures déployables existantes. Ces structures permettent d'optimiser l'espace comme le montrent la figure 0.3a représentant le principe du système et la figure 0.3b sur laquelle est représenté un pont pliable contrôlé à partir de câbles actifs et passifs.



FIGURE 0.3 – Structure déployable contrôlée par des câbles actifs et passifs : a) idée générale
b) pont pliable

Il existe également des structures extensibles réalisées à partir d'origami (28) dont le ratio du volume de l'espace de travail sur le volume du système rétracté est intéressant, cependant la résistance au flambage, qui est un élément essentiel du projet, n'est pas respectée.

L'objectif consiste à concevoir un robot à six degrés de liberté maximisant le ratio du volume utile sur le volume rétracté. S. E. Landsberger (15) propose une poutre télescopique répondant à cette problématique. En effet, la longueur de la poutre rétractée doit être au moins n fois plus petite que sa longueur déployée, où n est le nombre de segments de l'actionneur prismatique. De plus, ces segments doivent s'emboîter les uns dans les autres, la résistance au flambage est donc potentiellement diminuée. Afin de pallier ce problème, des câbles travaillant uniquement en tension sont fixés sur la poutre comme nous pouvons l'observer sur la figure 0.4. Un autre robot télescopique résistant au flambage a été développé par Hello Robot™ (24). Nous choisissons cette architecture afin d'améliorer la résistance au flambage, cependant nous

souhaitons remplacer la poutre télescopique par un autre mécanisme pour atteindre un volume rétracté minimal.

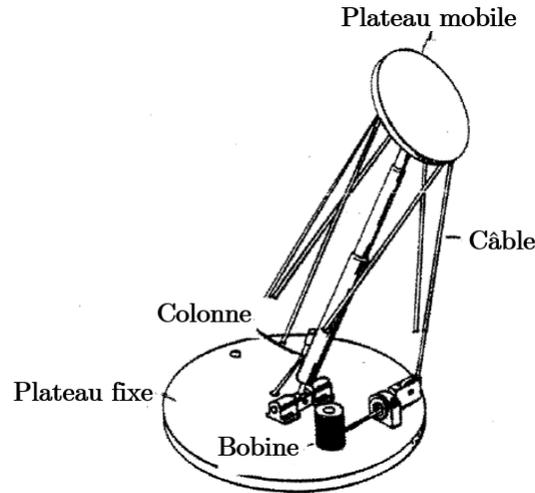


FIGURE 0.4 – Manipulateur parallèle commandé à l'aide de câbles (15)

Nous souhaitons concevoir un mécanisme résistant au flambage et ayant un volume rétracté minimal. Pour cela, il est possible d'utiliser deux chaînes ou bandes flexibles venant s'associer pour former une structure extensible résistante au flambage. Une solution probante est de concevoir un mécanisme s'inspirant du système de fermeture éclair. Ce dernier, dont le premier inventeur est E. Howe (11), est formé de deux bandes composées de dents décalées qui viennent se rejoindre grâce à un guide convergent servant à engrener les dents et un curseur permettant de les séparer lorsque rétracté. Afin de comprendre le mécanisme de fermeture éclair, il est également important de connaître les efforts mis en jeu ainsi que le couple et la puissance du moteur nécessaires à la fermeture de ce dispositif (1). Ce concept est utilisé dans certaines poutres rétractables afin de maximiser le ratio du volume utile sur le volume rétracté.

Parmi les mécanismes de poutres rétractables inspirés par le système de fermeture éclair, nous retrouvons deux grandes familles, la première utilise des bandes flexibles tandis que la seconde utilise des chaînes venant s'intercaler à l'aide de dents.

Poutres rétractables s'inspirant du principe de la fermeture éclair utilisant des bandes flexibles

Le premier mécanisme de ce type provient d'un brevet de 1939 intitulé « Lifting Jack » (8), qui décrit un système de levage comportant une section circulaire. Ensuite, le « Zippermast » (13), représenté à la figure 0.5, développé par Geo Systems Incorporated est un robot mobile de surveillance composé d'un mécanisme utilisant trois bandes de métal se rejoignant en un triangle. Le verrouillage de celles-ci est réalisé à l'aide de dents présentes sur les bandes. Ce

système forme alors une poutre triangulaire dont le ratio d'extension est intéressant mais la section triangulaire réduit la quantité d'efforts transmissibles.



FIGURE 0.5 – Poutre rétractable s'inspirant du principe de la fermeture éclair utilisant des chaînes : le Zippermast (13)

Puis, le « Spiralift » (12) développé par la Gala Systems est un système composé de deux bandes d'acier flexibles formant une poutre circulaire rigide, le ratio d'extension et la résistance au flambage de ce système sont intéressants mais ce mécanisme est coûteux. Afin de résister à la fatigue causée par les enroulements et déroulements successifs, ces bandes d'acier ne doivent pas être trop épaisses, ce qui diminue la résistance au flambage. Ce mécanisme impose donc un compromis très contraignant entre la résistance au flambage et le volume rétracté, ce qui explique qu'il soit utilisé exclusivement en position verticale. Le « Spiralift » est utilisé comme système de levage pour les scènes de théâtre, auditoriums ou salles de concert modulables.

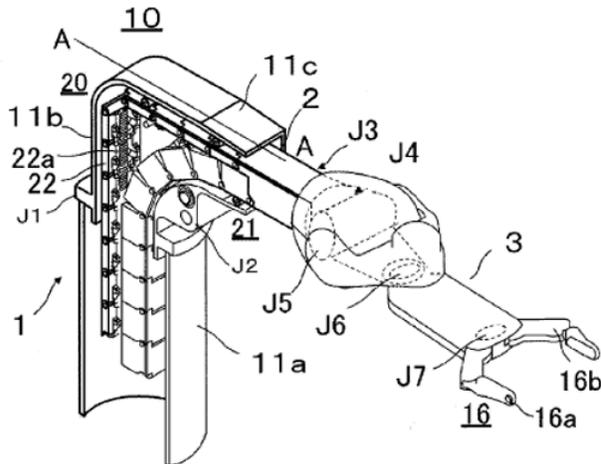
De plus, le « Spiral Zipper » (4), représenté à la figure 0.6, est un actionneur prismatique extensible en forme de cylindre permettant d'atteindre un ratio d'extension intéressant (14 : 1) et résistant au flambage. Ce mécanisme fait l'objet d'un brevet (16) et est utilisé comme bras de robot pour effectuer des tâches de manipulation dans un établissement de soins aux personnes âgées (21).



FIGURE 0.6 – Poutres rétractables s’inspirant du principe de la fermeture éclair utilisant des bandes flexibles : le Spiral Zipper de 57mm de diamètre, commençant à se déployer (à gauche) et complètement déployé (à droite) (4)

Poutres rétractables s’inspirant du principe de la fermeture éclair utilisant des chaînes

La deuxième famille des mécanismes s’inspirant de la fermeture éclair est composée de systèmes utilisant des chaînes, comme le « Self Erecting Zipper Lift » (14), un mécanisme de levage constitué de deux chaînes formant une seule partie rigide extensible de section carrée grâce à un système d’engrenages. Ce système s’enroule dans une boîte afin d’optimiser le volume rétracté. De plus, Life Robotics Inc. a conçu un bras de robot rétractable (27) composé de deux chaînes venant s’imbriquer grâce à un système d’engrenage. Cet assemblage forme un bras de robot de section carrée, qui est représenté à la figure 0.7a. Enfin, le « ZBeam » (25) est un mécanisme imprimable en 3D composé de deux chaînes venant s’emboîter perpendiculairement de manière à créer une poutre rigide en forme de L. Ce système modulaire, que nous pouvons observer à la figure 0.7b, est conçu pour l’exploration spatiale.



(a) Le bras de robot rétractable développé par Life Robotics Inc (27)



(b) Le ZBeam (25)

FIGURE 0.7 – Poutres rétractables s’inspirant du principe de la fermeture éclair utilisant des chaînes

Il est également essentiel de connaître les principales caractéristiques des robots parallèles entraînés par câbles (RPEC) ainsi que les efforts intervenant selon le type de robot étudié. A. Pott (23) fournit des éléments théoriques sur les RPEC ainsi que leurs principales applications et une méthode de conception. Afin de concevoir un actionneur prismatique rétractable supportant la compression, il est nécessaire d’inventer une structure déployable résistante au flambage. D’après cette revue de littérature, il semble intéressant de combiner le mécanisme de fermeture éclair et des câbles travaillant uniquement en tension pour créer une poutre extensible optimisant l’espace de travail.

Objectifs spécifiques

Dans ce contexte, il est nécessaire de développer un nouveau système de poutre rétractable à six degré de liberté. Ce système résistante au flambage sera utilisé pour actionner un robot à câbles afin d’optimiser l’espace de travail. Il devra être abordable, facile à installer et devra également accueillir un ensemble d’enrouleurs et de câbles sur lesquels sera actionné le robot. Afin de concevoir un actionneur prismatique rétractable supportant la compression, il est nécessaire d’inventer une structure déployable résistante au flambage. D’après la revue de littérature, il semble intéressant d’utiliser des câbles travaillant uniquement en tension pour contrôler les mouvements d’une poutre extensible optimisant l’espace de travail. Nous faisons l’hypothèse que cette stratégie permettra de maximiser le volume de l’espace de travail par rapport au volume rétracté de l’ensemble. Après avoir conçu ce prototype, nous mesurerons le volume de l’espace de travail et le volume rétracté du système. Puis, nous réaliserons un essai de compression pour vérifier si le système est capable de supporter un robot à câbles.

Chapitre 1

Description d'ensemble du concept de robot proposé

Dans un premier temps, nous allons présenter le système dans son ensemble, puis nous nous intéresserons à sa modélisation en terme de résistance des matériaux et enfin nous rappellerons les objectifs spécifiques tout en définissant le volume de travail du robot.

1.1 Présentation du système

Le système est composé d'une poutre dont l'extrémité est soumise à une charge utile P_u . Cette poutre est reliée au bâti par un joint de cardan qui libère les rotations selon les axes y et z comme le montre la figure 1.1. La poutre est constituée de chaînes permettant de contrôler la translation selon l'axe x et ces chaînes se rétractent afin d'optimiser le volume occupé par le robot.

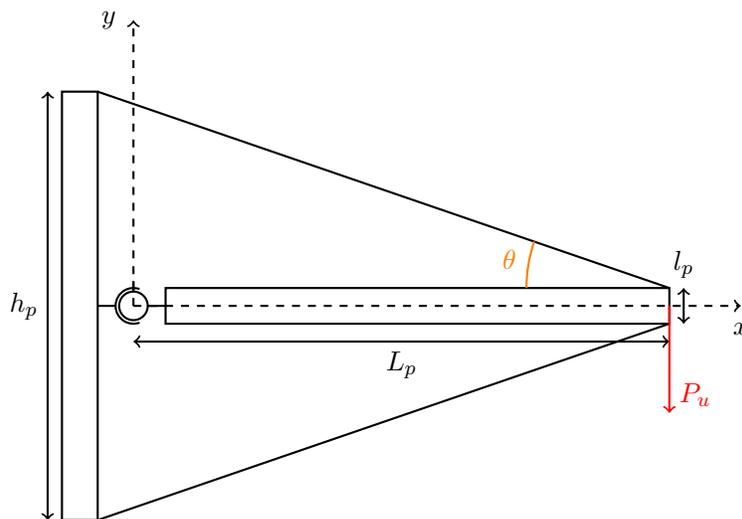


FIGURE 1.1 – Schéma du système

Grâce à cette modélisation, nous pouvons déterminer l'angle d'inclinaison des câbles par la relation suivante :

$$\theta = \arctan\left(\frac{h_p - l_p}{2L_p}\right) \quad (1.1)$$

Ces câbles sont fixés à l'extrémité de la poutre afin de maintenir cette dernière en compression et de pouvoir contrôler les différentes rotations. Pour cela, nous utiliserons trois câbles comme dans l'article relatif à la conception d'un bras robotique sphérique (4). Nous utilisons deux câbles situés à l'extrémité supérieure et symétrique par rapport au plan (x, y) et un câble situé dans ce même plan mais à l'extrémité inférieure, la figure 1.2 représente cette configuration. Ces câbles permettraient donc de contrôler la rotation d'angle β selon l'axe y et la rotation d'angle γ d'axe z . De plus, un effecteur s'articulera à l'extrémité de la poutre comme nous pouvons le voir sur la figure 1.2.

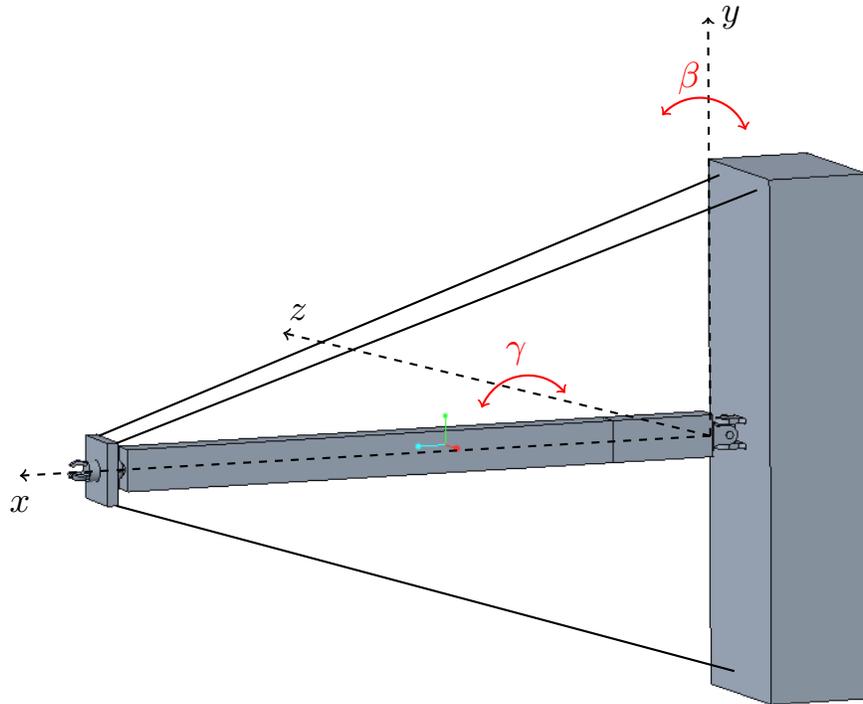


FIGURE 1.2 – Schéma du système avec un effecteur

1.2 Définition du volume de travail

L'objectif principal est de concevoir un actionneur prismatique rétractable maximisant le rapport du volume de l'espace de travail sur le volume rétracté du système. Cet actionneur doit également supporter la compression et résister au flambage. Ce robot autorisera deux rotations qui seront actionnées par des câbles travaillant uniquement en tension. Le volume de travail est représenté sur la figure 1.3 avec :

- β , l'angle de débattement autour de l'axe y égal à 170° ,
- γ , l'angle de débattement autour de l'axe z ,
- L_p , la longueur de la poutre déployée,
- L_{pm} , la longueur des maillons déployés.

Ces variables sont représentées sur la figure 1.3 ainsi que le volume élémentaire dV défini plus bas.

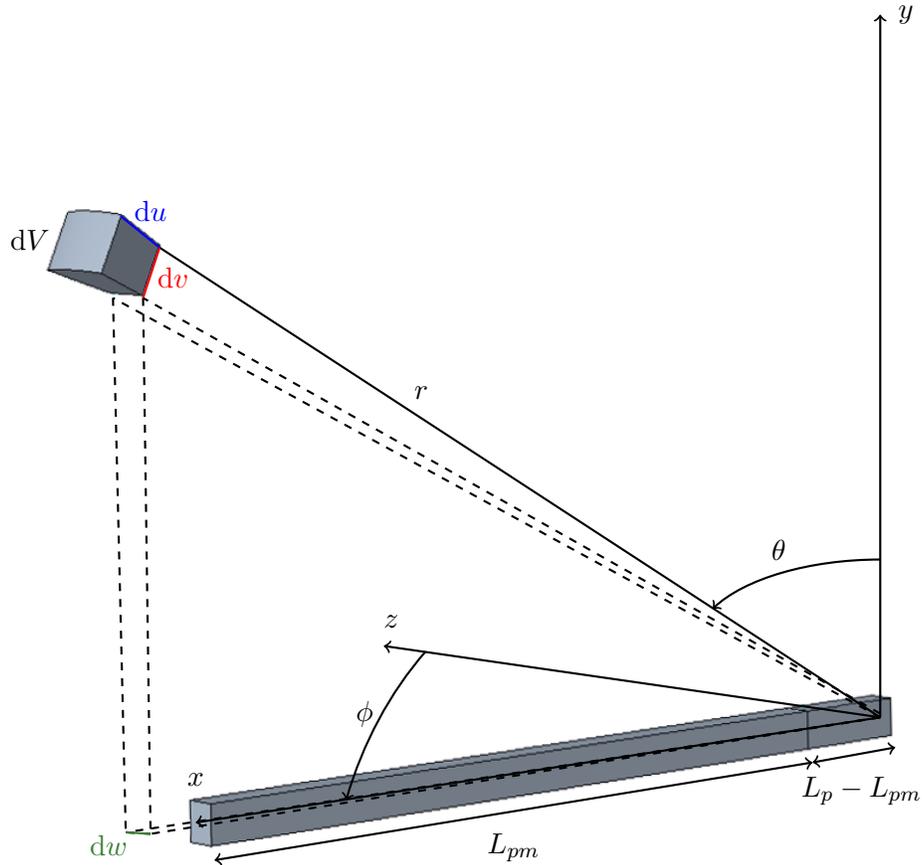


FIGURE 1.3 – Schéma du volume

Le volume élémentaire dV représenté sur la figure 1.3 est exprimé en coordonnées sphériques comme :

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (1.2)$$

Nous pouvons alors déterminer le volume de travail du robot V_w , en intégrant ce volume élémentaire dV :

$$V_w = \iiint_V dV \quad (1.3)$$

$$= \int_r r^2 dr \int_\theta \sin \theta d\theta \int_\phi d\phi \quad (1.4)$$

$$= \left[\frac{r^3}{3} \right]_{L_p - L_{pm}}^{L_p} \left[-\cos \theta \right]_0^\gamma \left[\beta \right]_0^\beta \quad (1.5)$$

$$= \frac{1}{3} \left[L_p^3 - (L_p - L_{pm})^3 \right] \beta (1 - \cos \gamma) \quad (1.6)$$

1.3 Force critique d'Euler

Dans cette partie, nous allons modéliser le système composé d'une poutre soumise à son propre poids et à une charge transversale P_u à son extrémité. La figure 1.4 représente cette modélisation qui va nous permettre de déterminer la force critique de flambage théorique ou la force critique d'Euler. Dans cette représentation, nous décomposons les forces appliquées par les câbles sur la poutre au point B selon deux composantes : F_{xB} et F_{yB} . Le poids linéique de la poutre est noté q .

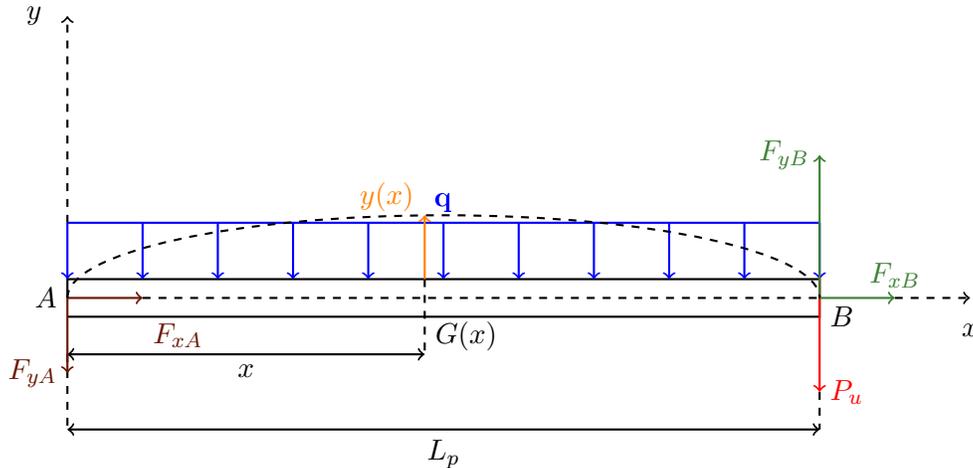


FIGURE 1.4 – Diagramme de corps libre de la poutre

D'après le diagramme des corps libres et le principe fondamental de la statique, nous pouvons écrire :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{xA} = F_{xB} \quad (1.7)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{yA} + F_{yB} = P + qL_p \quad (1.8)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_{yB} = P + \frac{qL_p}{2} \quad (1.9)$$

Nous en déduisons que :

$$F_{yA} = \frac{qL_p}{2} \quad (1.10)$$

Nous cherchons à déterminer la force critique d'Euler ou la limite de flambage ; pour cela nous étudions le cas où la poutre flambe comme le montre la figure 1.4. La déformée de la poutre est notée $y(x)$. Nous pouvons donc déterminer le moment de flexion suivant :

$$M_{fz}(x) = \frac{q}{2}(L_p - x)x - F_{xB}y(x) \quad (1.11)$$

Or nous savons que :

$$M_{fz} = EI_{Gz} \frac{d^2y}{dx^2} \quad (1.12)$$

Avec E qui représente le module d'Young du matériau considéré et I_{Gz} , le moment quadratique d'axe (Gz).

Nous allons étudier l'équation différentielle normalisée d'ordre deux à coefficients constants suivante :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{F_{xB}}{EI_{Gz}}y(x) = \frac{q}{2EI_{Gz}}x(L_p - x) \quad (1.13)$$

Son équation homogène associée est donnée ci-dessous :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{F_{xB}}{EI_{Gz}}y(x) = 0 \quad (1.14)$$

L'équation caractéristique associée à l'équation sans second membre est donnée ci-dessous :

$$r^2 + \frac{F_{xB}}{EI_{Gz}} = 0 \quad (1.15)$$

Son discriminant est donc :

$$\Delta = -\frac{4F_{xB}}{EI_{Gz}} \quad (1.16)$$

Or, comme F_{xB} est positif, nous en déduisons que Δ est négatif. Les solutions de l'équation caractéristique sont données ci-dessous.

$$r_1 = \alpha + i\beta = i\sqrt{\frac{F_{xB}}{EI_{Gz}}} \quad (1.17)$$

$$r_2 = \alpha - i\beta = -i\sqrt{\frac{F_{xB}}{EI_{Gz}}} \quad (1.18)$$

La solution de l'équation homogène est donc :

$$y_0(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)), \quad (1.19)$$

où $C_1 \in \mathbb{R}$ et $C_2 \in \mathbb{R}$.

Nous avons alors :

$$y_0(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{F_{xB}}{EI_{Gz}}}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{F_{xB}}{EI_{Gz}}}x\right) \quad (1.20)$$

Conditions aux limites

D'abord, nous nous intéressons au cas où $x = 0$, or nous savons que :

$$y_0(x = 0) = 0 \quad (1.21)$$

Nous obtenons alors : $C_1 = 0$

Puis nous étudions le cas où $x = L_p$, or nous savons que :

$$y_0(x = L_p) = 0 \quad (1.22)$$

Nous en déduisons que :

$$C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{F_{xB}}{EI_{Gz}}}L_p\right) = 0, \quad (1.23)$$

si $C_2 = 0$ alors la solution de l'équation différentielle homogène est la fonction nulle. Par conséquent, il n'y a alors pas de flambement. Nous avons donc :

$$\sin\left(\sqrt{\frac{F_{xB}}{EI_{Gz}}}L_p\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{F_{xB}}{EI_{Gz}}}L_p = \pi + 2k\pi, \quad (1.24)$$

où $k \in \mathbb{Z}$.

Pour $k = 0$, nous obtenons :

$$\frac{F_{xB}}{EI_{Gz}}L_p^2 = \pi^2 \Rightarrow F_{xB} = \frac{\pi^2 EI_{Gz}}{L_p^2} \quad (1.25)$$

Nous remarquons que la charge linéaire \mathbf{q} ne joue pas de rôle dans la limite de stabilité de la poutre. En effet, nous pourrions augmenter le poids de la poutre et par conséquent la charge linéaire \mathbf{q} sans que cela n'impacte le flambage. Nous scindons désormais le problème en deux parties : le flambage de la poutre indépendamment de son poids et les contraintes de flexion et de compression de la poutre soumise à son poids propre.

1.4 Flambage de la poutre non soumise à son poids

Nous avons précédemment conclu que la charge linéaire \mathbf{q} ne modifie pas la charge critique d'Euler. Nous étudions l'extrémité de la poutre et nous supposons que la force exercée par le

câble inférieur est négligeable par rapport à celle du câble supérieur, car ce dernier permet de soutenir la poutre. Nous cherchons à déterminer la force F_c représentée sur la figure 1.5 afin d'établir une inégalité.

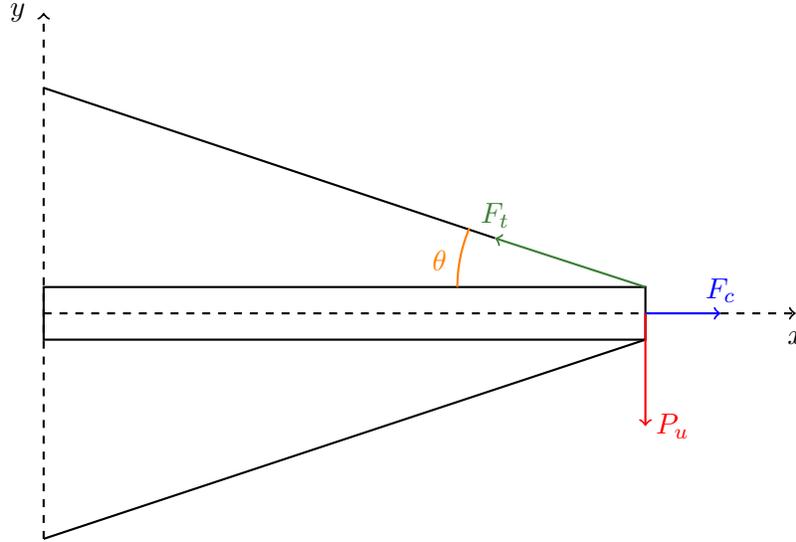


FIGURE 1.5 – Schéma câbles

D'après le principe fondamental de la statique, nous pouvons écrire :

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_t \sin \theta - P_u = 0 \Rightarrow F_t = \frac{P_u}{\sin \theta} \quad (1.26)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_c = F_t \cos \theta \quad (1.27)$$

Nous obtenons alors :

$$F_c = \frac{P_u}{\tan \theta} \quad (1.28)$$

Afin que la poutre ne flambe pas, nous devons respecter l'inégalité suivante :

$$F_c \leq F_{cr} \Rightarrow \frac{P_u}{\tan \theta} \leq \frac{\pi^2 EI_{Gz}}{L_p^2} \quad (1.29)$$

1.5 Contraintes de flexion et de compression de la poutre soumise à son propre poids

Nous nous intéressons aux contraintes en jeu dans la poutre soumise à son poids propre. Le système étudié est représenté sur la figure 1.6.

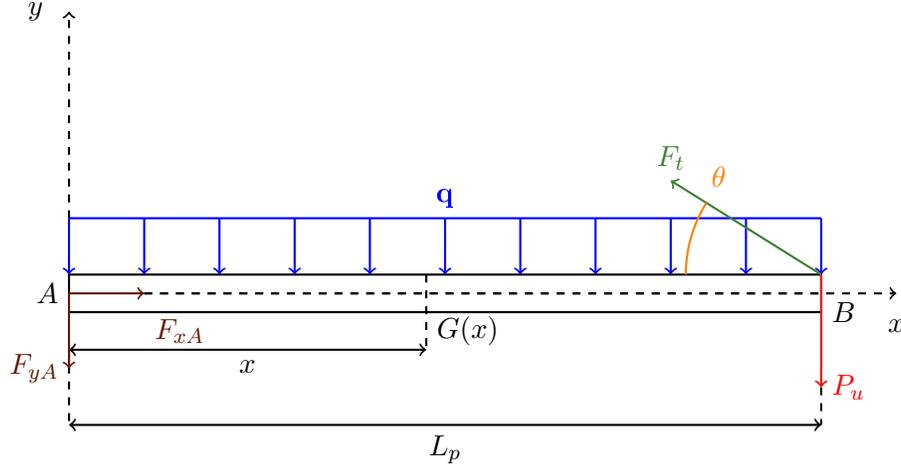


FIGURE 1.6 – Schéma des contraintes

D'après le principe fondamental de la statique, nous pouvons écrire :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{xA} = F_t \cos \theta \quad (1.30)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{yA} = -F_t \sin \theta + qL_p + P_u \quad (1.31)$$

Puis, nous cherchons à déterminer les différentes contraintes en jeu, nous notons S la section de la poutre et I_{Gz} , son moment quadratique selon l'axe (Gz) . La contrainte de compression est donc :

$$\sigma_x = -\frac{F_t \cos \theta}{S} \quad (1.32)$$

La contrainte de cisaillement est définie par :

$$\tau = \frac{q(L_p - x) - F_t \sin \theta + P_u}{S} \quad (1.33)$$

Le moment de flexion est défini par :

$$M_{fz} = (L_p - x)(-F_t \sin \theta + P_u + q\frac{L_p - x}{2}) \quad (1.34)$$

En dérivant ce terme, nous obtenons :

$$\frac{dM_{fz}}{dx} = -(F_t \sin \theta + P_u + q(L_p - x)) \quad (1.35)$$

Le moment de flexion est donc maximal lorsque $x = 0$. La contrainte de flexion est maximale sur la face supérieure de la poutre, c'est-à-dire lorsque $y = \frac{l_p}{2}$, celle-ci est définie par :

$$\sigma_f = \frac{(L_p - x)(-F_t \sin \theta + P_u(1 + \frac{L_p - x}{2}))}{I_{Gz}} y \quad (1.36)$$

Nous pouvons donc tracer les diagrammes relatifs à ces contraintes ainsi que leurs valeurs maximales représentés sur les figures 1.7, 1.8 et 1.9. La contrainte de flexion maximale est située à l'ordonnée $y = \frac{l_p}{2}$, c'est-à-dire sur la face supérieure de la poutre.

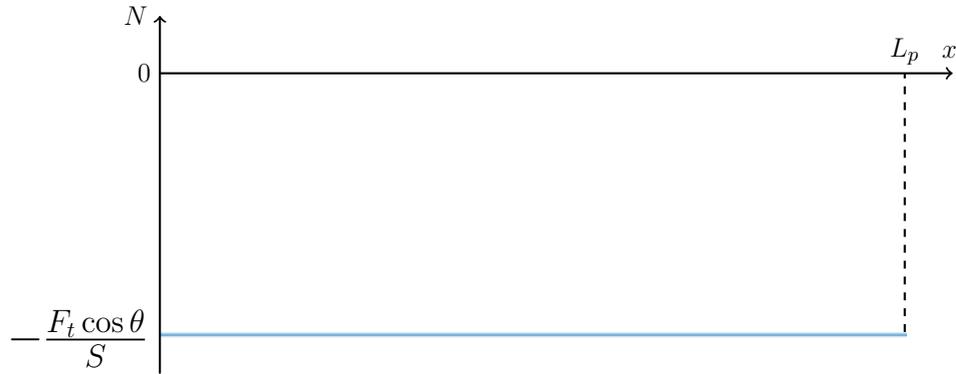


FIGURE 1.7 – Diagramme représentant la contrainte en compression

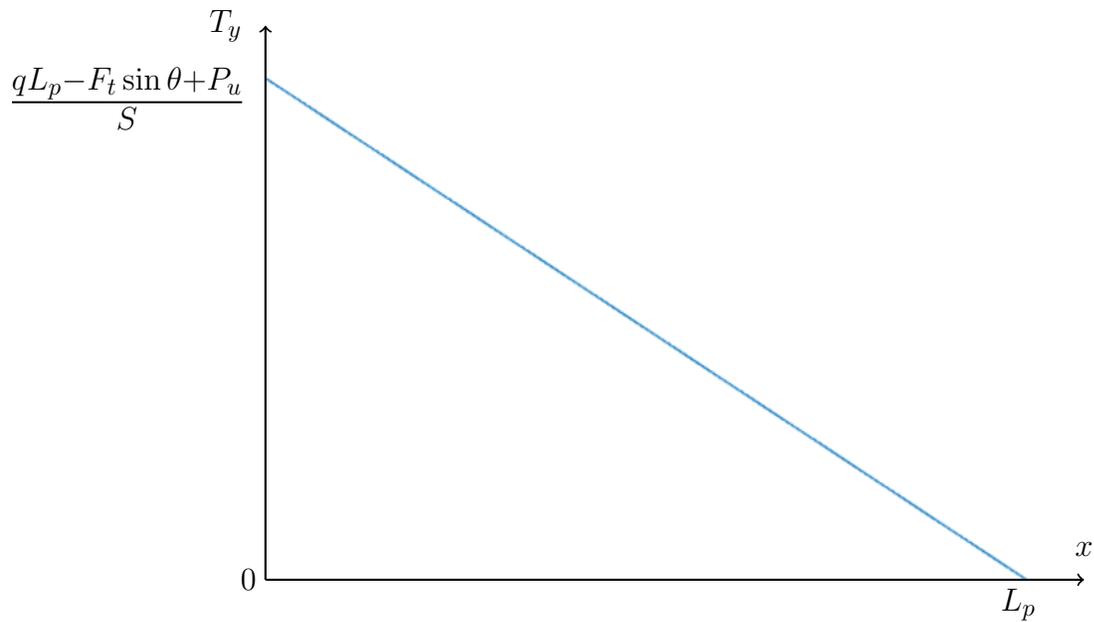


FIGURE 1.8 – Diagramme représentant la contrainte de cisaillement

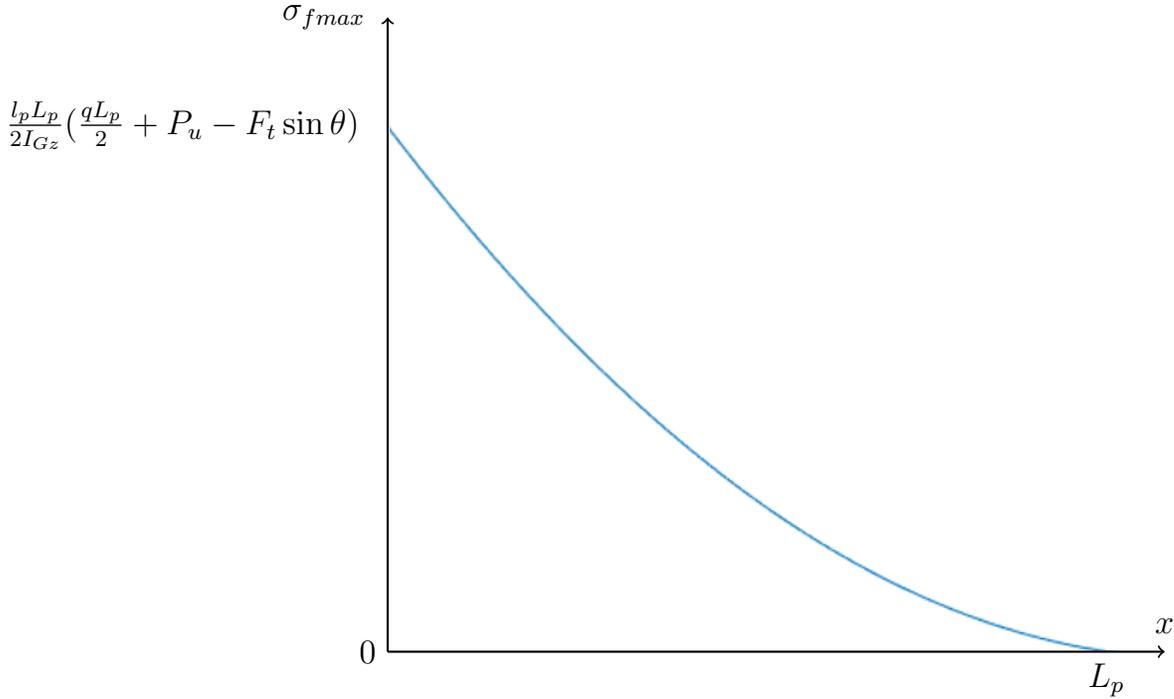


FIGURE 1.9 – Diagramme représentant la contrainte du moment de flexion pour $y = \frac{l_p}{2}$

L'utilisation des câbles impose que ceux-ci demeurent en compression. De plus, les chaînons composant la poutre doivent demeurer appuyés les uns sur les autres pour éviter que la poutre se brise. Par conséquent, la poutre doit toujours être en compression, comme le montre la figure 1.10.

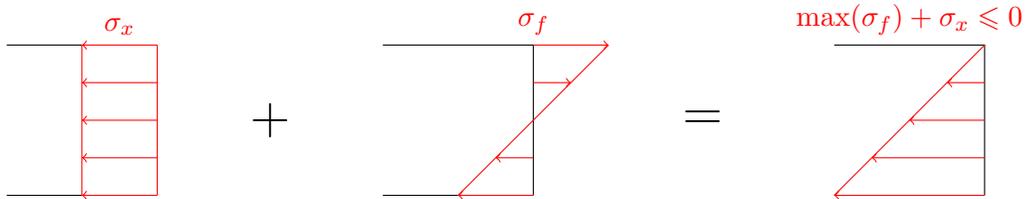


FIGURE 1.10 – Schémas représentant la section de la poutre soumise aux contraintes de flexion et de compression

Cela se traduit mathématiquement par la relation suivante :

$$\max(\sigma_f) + \sigma_x \leq 0 \Rightarrow \frac{l_p}{2I_{Gz}} L_p \left(\frac{qL_p}{2} + P_u - F_t \sin \theta \right) - \frac{F_t \cos \theta}{S} \leq 0 \quad (1.37)$$

En conclusion, nous devons respecter la contrainte 1.29 du flambage de la poutre non soumise à son poids et celle de la compression 1.37 afin que la poutre ne flambe pas et demeure toujours en compression.

Dans ce chapitre nous avons présenté le système dans son ensemble et défini le volume de travail que nous souhaitons maximiser. Puis, nous avons étudié la force critique d'Euler, ainsi que le flambage de la poutre non soumise à son poids et les contraintes de flexion et de compression de cette poutre. Désormais, nous cherchons à concevoir les maillons composant les chaînes de notre système ainsi qu'un guide permettant de les assembler et de les désassembler facilement.

Chapitre 2

Conception des maillons et du guide

Dans un premier temps, il est essentiel de concevoir les maillons composant les chaînes. Nous allons étudier la forme optimale de la poutre constituée des deux chaînes emboîtées pour répondre à ce problème, puis, nous nous intéresserons à la forme des maillons et aux liaisons mécaniques qui les composent.

2.1 Résistance des matériaux

Dans le chapitre précédent nous avons présenté une modélisation simple du système, l'objectif de cette partie est d'étudier la poutre avec différentes formes de section afin de comparer les résultats et effectuer une sélection.

2.1.1 Présentation des sections étudiées

Les sections en I, carrée évidée, rectangulaire évidée et annulaire seront étudiées afin de déterminer la meilleure d'entre elles. Nous allons calculer le moment quadratique et la surface de chacune des sections suivantes. Nous souhaitons maximiser la force critique d'Euler (1.25). Nous étudierons le moment quadratique I_{Gz} de chacune des sections présentées précédemment. Celui-ci doit être le plus grand possible. Afin de pouvoir comparer les résultats des différentes sections, nous utiliserons les mêmes hauteur et largeur, dont les valeurs respectives sont : $h = 50$ mm et $b = 20$ mm. De plus, pour chacune de ces sections, nous considérerons une épaisseur de paroi $e = 5$ mm. Enfin, pour les sections de hauteur et largeur égales, nous étudierons un côté de longueur : $c = 31,5$ mm et une épaisseur de paroi $e = 5$ mm, afin que les surfaces des différentes sections soient comparables. Ces sections sont comparées dans les tableaux 2.1 et 2.2.

TABLEAU 2.1 – Sections étudiées

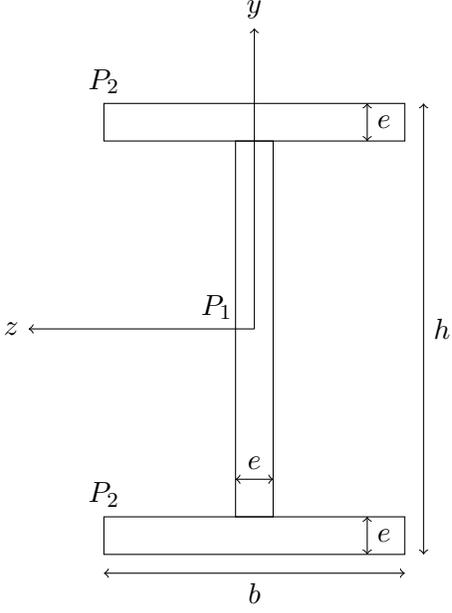
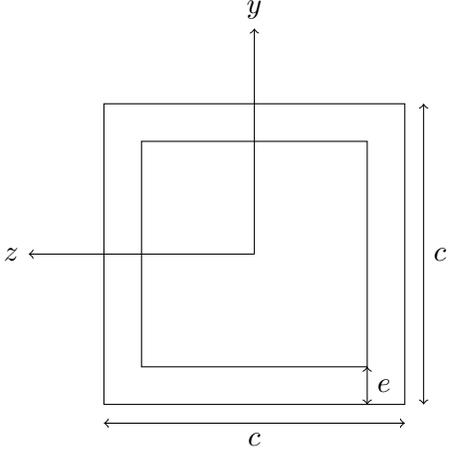
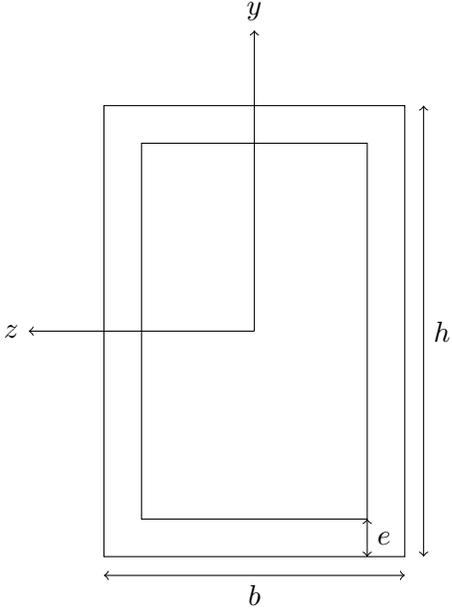
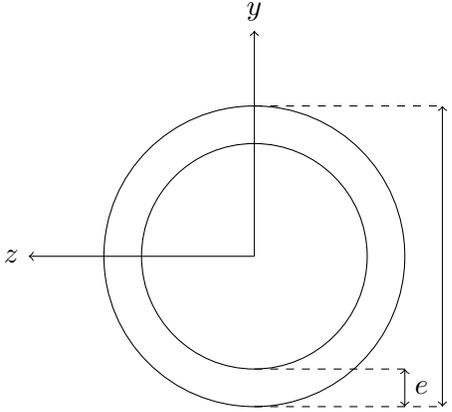
Section étudiée	Schéma	Moment quadratique
Section en I	 <p>The diagram shows an I-section with a central web of height h and thickness e, and two flanges of thickness e and width b. The web is labeled P_1 and the flanges are labeled P_2. A coordinate system is shown with the y-axis pointing upwards and the z-axis pointing to the left.</p>	<p>Cette section est composée de trois parties, l'âme notée P_1 et deux parties symétriques notées P_2. Nous avons :</p> $I_{Gz1} = \frac{e(h-2e)^3}{12} = 26667 \text{ mm}^4$ $I_{Gz2} = \frac{be^3}{12} + A_2 d_{x2}^2 = \frac{be^3}{12} + \frac{beh^2}{4} = 62708 \text{ mm}^4$ <p>Nous obtenons alors :</p> $I_{Gz} = I_{Gz1} + 2I_{Gz2} = 152083 \text{ mm}^4$
Section carrée évidée	 <p>The diagram shows a square hollow section with an outer side length c and an inner side length $c-2e$, where e is the thickness of the wall. A coordinate system is shown with the y-axis pointing upwards and the z-axis pointing to the left.</p>	<p>Nous pouvons donc écrire :</p> $I_{Gz} = \frac{c^4 - (c-2e)^4}{12} = 64240 \text{ mm}^4$

TABLEAU 2.2 – Sections étudiées (suite)

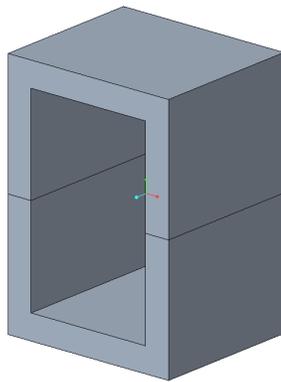
Section étudiée	Schéma	Moment quadratique
Section rectangulaire évidée		<p>Nous obtenons les équations suivantes :</p> $I_{Gz} = \frac{bh^3 - (b-2e)^3(h-2e)}{12} = 205000 \text{ mm}^4$
Section annulaire		<p>Nous obtenons les équations suivantes :</p> $I_{Gz} = \frac{\pi}{64}(c^4 - (c-2e)^4) = 37840 \text{ mm}^4$

2.1.2 Sélection de la forme de la poutre

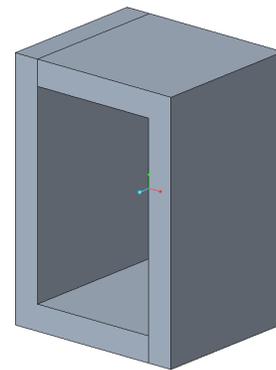
Afin de choisir la meilleure forme de poutre, il est important de considérer le système d'emboîtement des maillons. En effet, certaines formes peuvent rendre cet emboîtement complexe. Nous pouvons remarquer que les sections rectangulaire et carrée évidée facilitent le montage alors que des sections en I ou annulaire le complexifient. En considérant les résultats précédents, nous choisissons une poutre de section rectangulaire évidée dont les dimensions seront déterminées postérieurement. Pour avoir la plus petite flèche possible, il faut que le moment quadratique soit maximal. De plus, la poutre doit supporter le flambage, nous devons donc maximiser la force critique d'Euler (1.25). La section rectangulaire évidée est donc le meilleur choix.

2.2 Géométrie des maillons et conception de leurs liaisons

Afin d'obtenir une section rectangulaire évidée, nous évaluons la possibilité d'assembler deux maillons à sections en L ou deux maillons à sections en U venant s'emboîter l'un dans l'autre comme le montre la figure 2.1.



(a) Assemblage des deux maillons à sections en U



(b) Assemblage des deux maillons à sections en L

FIGURE 2.1 – Assemblage des maillons

Afin que l'ensemble soit rigide, les deux rotations entre chaque maillon doivent être bloquées. Par conséquent, il suffit de décaler chaque chaîne d'un demi-maillon comme le montre la figure 2.2. Les maillons en forme de U semblent l'assemblage le plus facilement réalisable car l'emboîtement des maillons se fait dans le même plan.

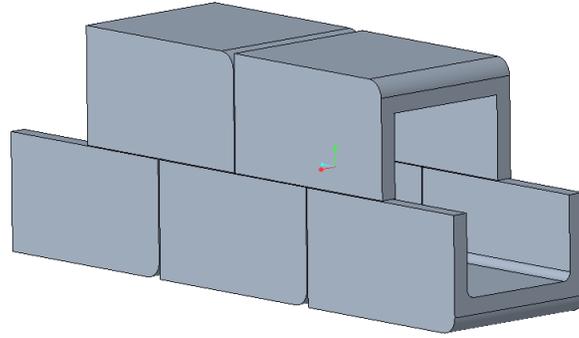
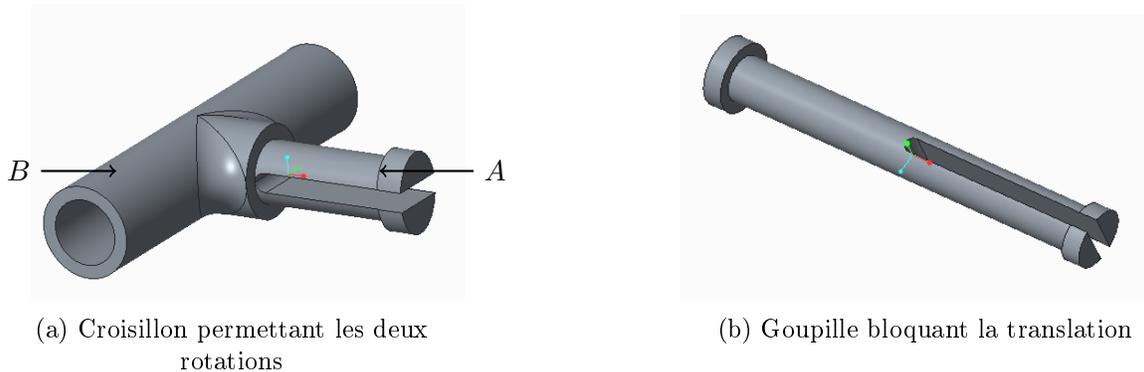


FIGURE 2.2 – Maillons en forme de U

Dans cette partie, nous étudierons les liaisons reliant les maillons. Ces derniers doivent pouvoir pivoter selon l'axe z afin de se loger dans le réservoir et également selon l'axe x pour permettre la torsion. Les chaînes doivent relier la poutre qui pivote autour des axes y et z (voir figure 1.2), au réservoir, qui est fixe. Ainsi, chaque chaîne doit être non seulement capable de flexion, mais aussi de torsion, pour ne pas entraver les mouvements de la poutre.

L'objectif est donc de concevoir des liaisons entre les maillons compactes, facilement démontables et imprimables en 3D. Nous devons réaliser deux liaisons pivot, l'une selon l'axe y et l'autre selon l'axe z . L'ensemble forme donc un joint de cardan. Pour cela, nous avons modélisé un croisillon permettant ces deux rotations comme le montre la figure 2.3a. Nous utilisons les propriétés de déformation élastique afin de réaliser ces liaisons. La partie A comprend une portion évidée qui se déforme pour permettre de s'emboîter dans le maillon suivant. La partie B vient se loger dans le maillon précédent, puis une goupille représentée à la figure 2.3b se déformant de la même manière que le croisillon permet de bloquer la translation du croisillon.



(a) Croisillon permettant les deux rotations

(b) Goupille bloquant la translation

FIGURE 2.3 – Liaisons entre les maillons

La figure 2.4a représente le montage des deux chaînes ainsi que leurs liaisons, le croisillon est représenté en rouge tandis que la goupille est affichée en jaune. La figure 2.4b illustre une coupe

de ce système facilitant la compréhension de ce montage. Nous avons ajouté des logements dans les maillons permettant d'accueillir le croisillon et la goupille afin de libérer deux degrés de rotation.

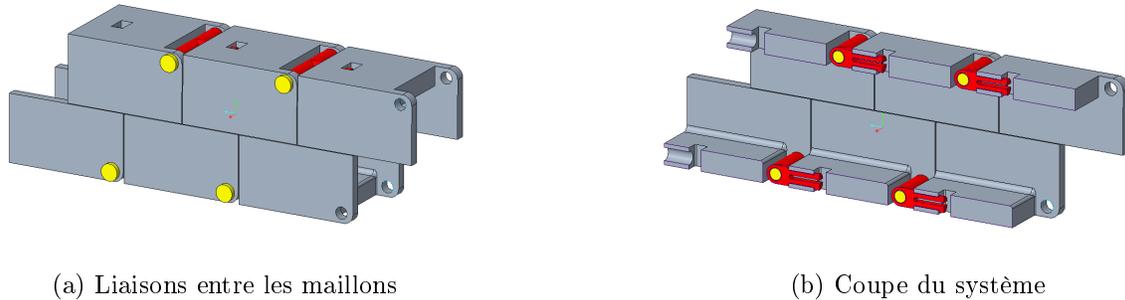


FIGURE 2.4 – Liaisons entre les maillons

2.3 Système d'emboîtement des maillons

Après avoir choisi la forme des maillons et les liaisons les composant, il est maintenant nécessaire de concevoir leur système d'emboîtement.

2.3.1 Choix du système d'emboîtement des maillons

Nous cherchons alors un type de liaison pouvant être imprimé en 3D et permettant un assemblage rapide, fiable et facilement répétable. Les liaisons *snap-fits* présentent ces avantages, puisque la déformation élastique permet un emboîtement entre les deux pièces tout en ayant la possibilité de réitérer cette opération sans endommager le système. Les *snap-fits* sont une méthode d'assemblage reposant sur l'emboîtement élastique. La figure 2.5 représente un *snap-fit* défini comme l'ensemble de l'interface d'attachement.

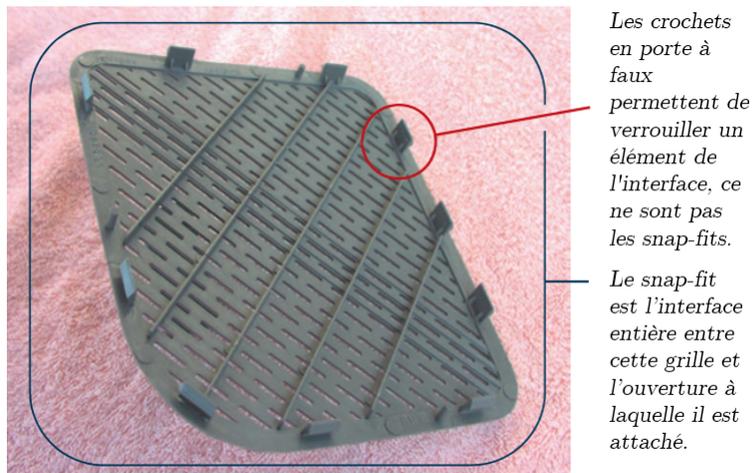


FIGURE 2.5 – Définition du *snap-fit* (2)

Nous pouvons classer les connexions *snap-fits* en trois grandes catégories :

— **Les liaisons à forme annulaire**

Cette forme de liaison est représentée sur la figure 2.6. Une certaine différence entre le diamètre interne et le diamètre externe des deux pièces, permet le maintien d'une pièce contre l'autre. Ce type de liaison est plus résistant à la fatigue.

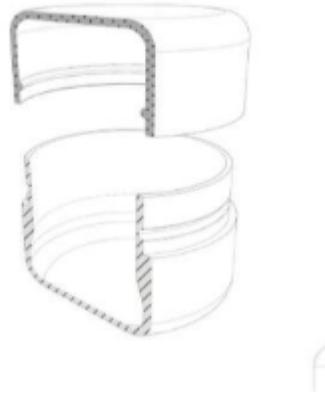


FIGURE 2.6 – Liaison annulaire

— **Les liaisons agissant en torsion**

Ce type de connexion, représenté sur la figure 2.7, utilise au maximum les capacités de déformation du plastique. L'utilisation la plus commune serait la déformation d'une pièce rattachée par une liaison pivot imprimée d'un seul et même bloc. La liaison ne pourrait donc pas pivoter, en revanche, si une force y est appliquée, créant ainsi de la flexion sur la pièce, nous pouvons suffisamment déformer le plastique pour venir emboîter une seconde pièce. Ce type de liaison résiste assez bien à la fatigue mais les deux pièces peuvent se décoller assez facilement si de grands efforts sont appliqués.

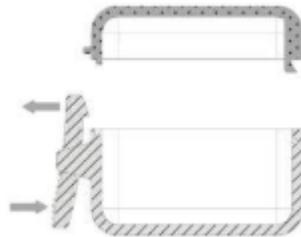


FIGURE 2.7 – Liaison torsion

— **Les liaisons en porte à faux**

Ce type de liaison, représenté sur la figure 2.8, semble la plus intéressante. En effet, nous distinguons dans cette configuration les rôles de pièces mâle et femelle. C'est la

connexion la plus utilisée car elle permet un emboîtement définitif plus facile que la connexion annulaire. Une des deux pièces à assembler dispose d'une extrusion en porte-à-faux, tel un crochet. Une infinité de formes existe afin que cette structure puisse s'assembler dans un trou, une arête ou tout autre géométrie. La structure en porte-à-faux vient se déformer afin de se placer dans son logement. Ces types de liaisons peuvent supporter de grands efforts et peuvent donc être adaptés à notre projet.

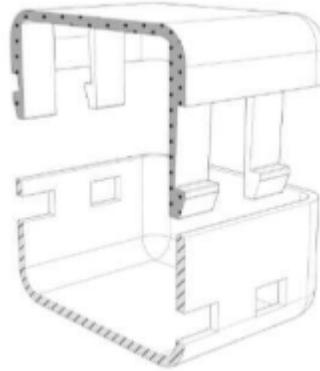


FIGURE 2.8 – Liaison en porte à faux

2.3.2 Dimensionnement des *snap-fits*

Pour cela, nous devons dimensionner correctement nos leviers ou crochets en porte-à-faux afin qu'ils ne cassent pas et résistent le mieux possible en fatigue. Pour nous aider dans cette tâche nous avons utilisé plusieurs sources, à savoir un document technique de Bayer MaterialScience (17) ainsi que le livre de Paul R. Bonenberger (2) dont les figures sont représentées 2.9.

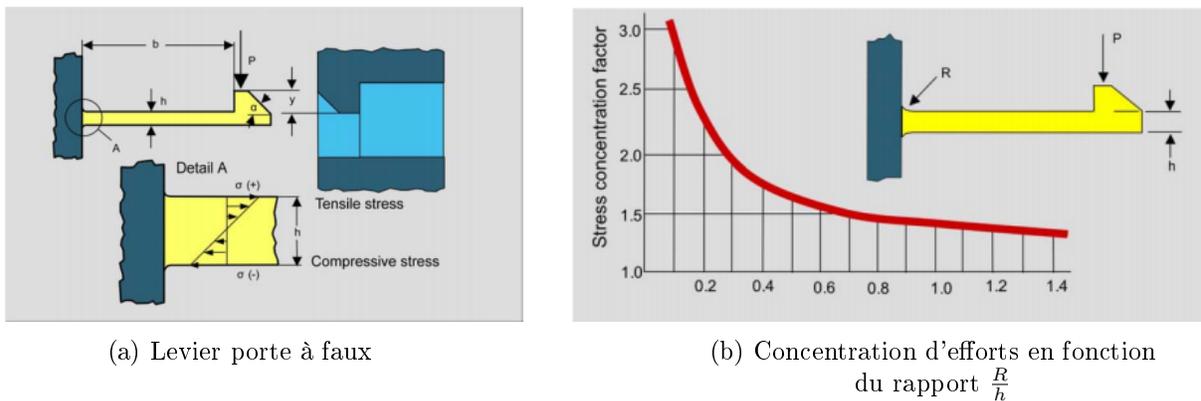


FIGURE 2.9 – Images extraites de Bayer MaterialScience

Comme l'illustre le document de Bayer, les leviers sont soumis à des efforts de compression et de flexion. Nous voulons que le levier puisse être suffisamment souple pour venir se loger

mais suffisamment solide pour ne pas rompre à cause du moment de flexion créé au niveau de l'encastrement à sa base. C'est en effet à cet endroit que le levier est le plus faible, pour palier cela, un congé est nécessaire. Grâce à ce graphique, nous pouvons avoir une idée du ratio optimal entre l'épaisseur et la taille du congé. Cependant, ce dernier viendrait gêner l'assemblage des composants, créant des zones de vide entre les pièces. Ces zones de vides peuvent entraîner des contraintes résiduelles. Nous devons donc trouver un bon compromis, entre l'assemblage et la résistance du levier porte-à-faux. Le congé n'est pas le seul paramètre sur lequel nous pouvons jouer lors de la conception, en effet la section joue grandement sur la résistance du levier. Nous pouvons approximer un dimensionnement à l'aide des formules du document de Bayer.

Nous utilisons les dimensions suivantes, décrites sur la figure 2.9 :

- Base $b = 5$ mm,
- Hauteur $h = 2$ mm,
- Longueur $l = 15$ mm,
- *Undercut* $y = 1,5$ mm.

Afin que notre levier puisse s'assembler correctement, ce dernier doit se déformer de 1,5 mm afin de pouvoir se loger dans la partie femelle. Nous pouvons donc déterminer la déformation que va subir notre pièce à l'aide de son module d'Young (ici pour du PLA¹ : $E_{PLA} = 2540$ MPa (19)) :

$$y = 0,86 \frac{\epsilon l^2}{h} = 1,5 \text{ mm}$$

Nous avons alors :

$$\epsilon = \frac{1,5h}{0,86l^2} = 15,5 \cdot 10^{-3} \quad (2.1)$$

Grâce à ce résultat, nous déduisons la valeur de la force à appliquer pour obtenir cette déformation : $F = \frac{bh^2}{6} \frac{E\epsilon}{l} = 8,749$ N

Et ainsi, nous pouvons vérifier que la contrainte entraînée par le moment fléchissant dans le levier ne le casse pas à sa base, là où le moment est maximal :

$$\sigma_f = \frac{M_{fzmax}}{\frac{I}{h/2}} = \frac{Fl}{\frac{bh^3}{12}} = 39,37 \text{ MPa} < R_E = 47,8 \text{ MPa},$$

où R_E est la limite d'élasticité du PLA (19).

Le problème majeur résultant de cette méthode de dimensionnement est la trop grande approximation des résultats. En effet, la section de notre levier en porte-à-faux n'est pas

1. Abréviation du polymère : acide polylactique (*polylactic acid*)

constante, c'est pour cette raison que nous utiliserons une simulation par éléments finis afin d'avoir une meilleure idée de la résistance de notre pièce.

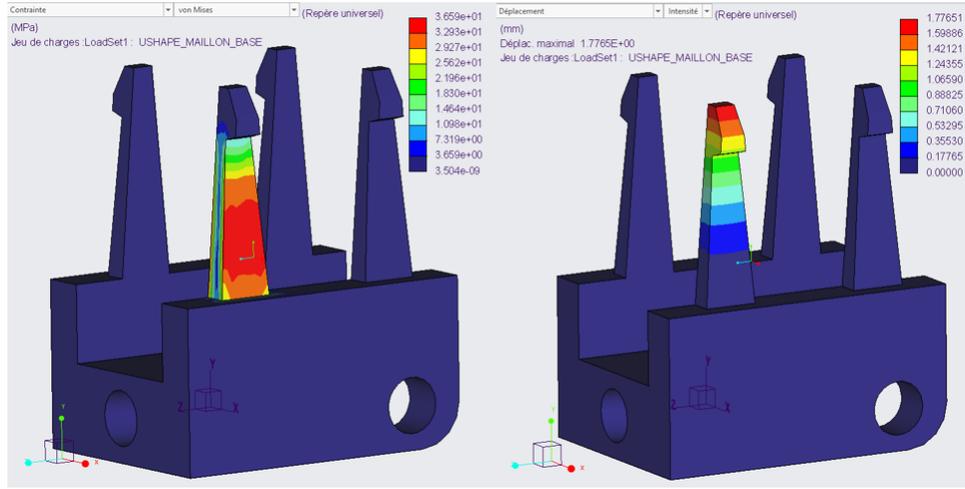


FIGURE 2.10 – Simulation en éléments finis du levier en porte-à-faux d'un maillon en U

Nous pouvons observer sur la figure 2.10, à gauche, les contraintes de Von Mises en MPa et à droite le déplacement en mm. Nous remarquons que les deux simulations permettent d'obtenir des résultats similaires pour les contraintes (36,59 MPa pour la simulation en éléments finis contre 39,37 MPa) et les déplacements (1,78 mm pour la simulation en éléments finis contre 1,5 mm). Cependant nous nous baserons sur la simulation en éléments finis, plus précise, afin de dimensionner nos pièces. Des détails sur la conception des *snap-fits* sont donnés en annexe A.

2.4 Choix du convergent et modélisation CAO

Après avoir modélisé les deux chaînes et déterminé l'emboîtement de celles-ci, il est nécessaire de concevoir le convergent permettant d'assembler et de désassembler ces chaînes tout en respectant les contraintes des *snap-fits*. Le guide convergent doit permettre d'accueillir les deux chaînes selon un certain angle afin que celles-ci s'emboîtent. L'objectif de cette partie consiste à modéliser le modèle CAO et d'y apporter les corrections nécessaires. Le convergent se compose de deux parties : une partie linéaire permettant l'emboîtement des deux chaînes et une seconde partie circulaire permettant d'orienter les chaînes pour assurer la liaison entre les chaînes et le réservoir.

Examinons d'abord la partie linéaire représentée sur la figure 2.11, qui a la forme d'un V d'angle de convergence α . Nous choisissons un angle initial de 15° . Les dimensions des parties droite et gauche correspondent aux dimensions respectives des maillons mâle et femelle alors que la dimension inférieure correspond à celle des deux maillons emboîtés.

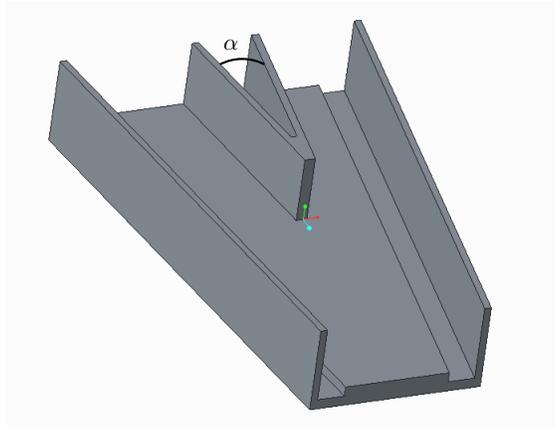


FIGURE 2.11 – Partie linéaire du guide

Puis, nous devons concevoir la deuxième partie du guide qui permettra aux maillons de se loger dans le réservoir. Dans un premier temps, nous choisissons de modéliser la partie circulaire afin qu'elle se termine sur une ligne horizontale. Afin de s'assurer que les maillons translatent bien le long du guide, nous avons mis en place un guidage le long des parties extérieures du convergent. Ce guidage sera assuré par les goupilles modélisées précédemment, il est représenté sur la figure 2.12 ainsi que le guide composé de la partie circulaire.

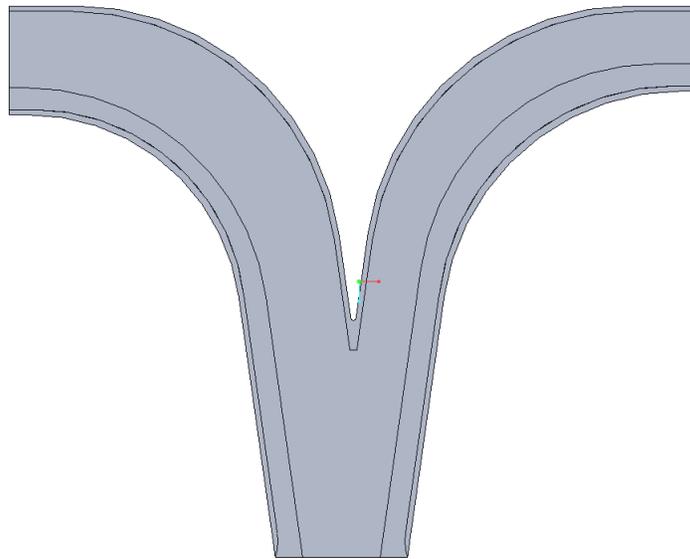


FIGURE 2.12 – Modélisation du guide composé d'une partie circulaire

2.4.1 Découpe du guide

Dans un premier temps, nous avons modélisé la partie circulaire du guide afin qu'elle se termine sur une ligne horizontale, comme montrée dans la partie précédente. Afin de mettre en lumière

les problèmes de cette modélisation nous avons élaboré une ébauche de ce guide relié par une liaison joint de cardan à son réservoir comme le montre la figure 2.13.

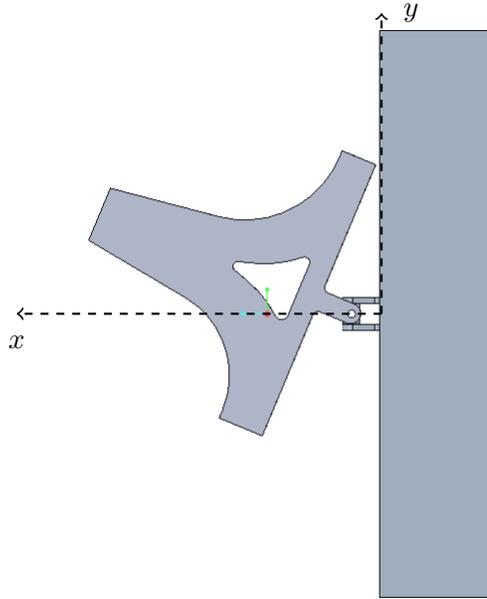


FIGURE 2.13 – Modélisation du guide avec le réservoir

Cette modélisation présente donc plusieurs difficultés :

- D’abord, la première conséquence est la diminution du débattement angulaire γ selon l’axe z . En effet, le guide entre en collision avec le réservoir comme le montre la figure 2.13.
- Puis, la conception des chaînes leur impose un sens d’enroulement unique, ce dernier est le même que la partie circulaire du guide. Or, nous pouvons observer sur la figure 2.13 que la chaîne inférieure ne pourrait pas accéder au réservoir car elle ne peut pas s’enrouler dans le sens contraire à celui du guide. La forme du guide horizontale constitue donc un problème majeur pour le guidage des chaînes vers le réservoir.

Pour palier ces problèmes, nous avons modélisé cette partie et établi les liaisons cinématiques entre les chaînes et le guide afin de modifier l’esquisse en conséquence. Cette modélisation constitue un premier pas, car une optimisation de ces paramètres sera effectuée dans les étapes suivantes. Nous avons donc effectué une découpe du guide représentée sur la figure 2.14.

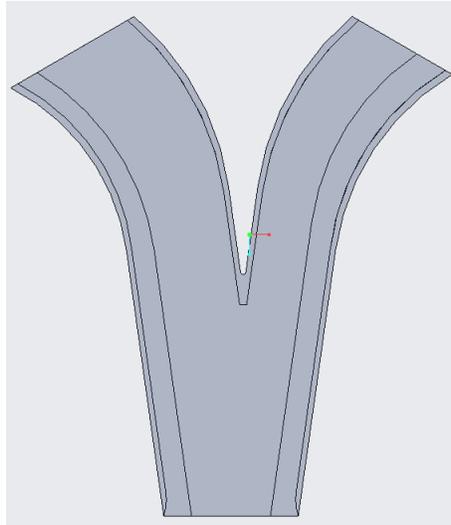


FIGURE 2.14 – Ébauche du guide

2.4.2 Vérification des collisions

Nous devons maintenant vérifier l'absence d'interférence lors de l'emboîtement des maillons. Pour cela, nous modélisons les liaisons entre chaque maillon de manière à former deux chaînes. Ces dernières translatent par rapport au guide et suivent la trajectoire imposée par le guidage. Sur la figure 2.15, nous pouvons remarquer que les maillons mâles interfèrent avec les maillons femelles lors de l'assemblage de ceux-ci. Nous avons donc ajouté deux points A et B à chaque sommet, représentés sur la même figure, afin d'étudier ces collisions.

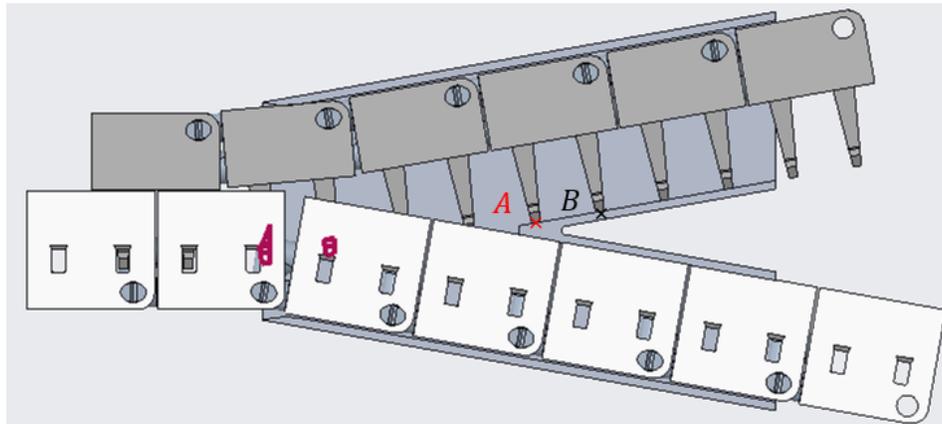


FIGURE 2.15 – Interférences des chaînes mâle et femelle, et position des points A et B

Puis, nous ajoutons un moteur afin que les chaînes translatent et s'emboîtent l'une dans l'autre. Cela nous permet d'analyser les trajectoires des points A et B par rapport au repère de la chaîne femelle afin de vérifier les collisions. Nous obtenons alors un tracé de ces points, ce qui nous permet de modifier le modèle CAO en conséquence et d'effectuer une vérification

en appliquant la même méthode. La modification (avant et après) de la pièce femelle est représentée sur la figure 2.16.

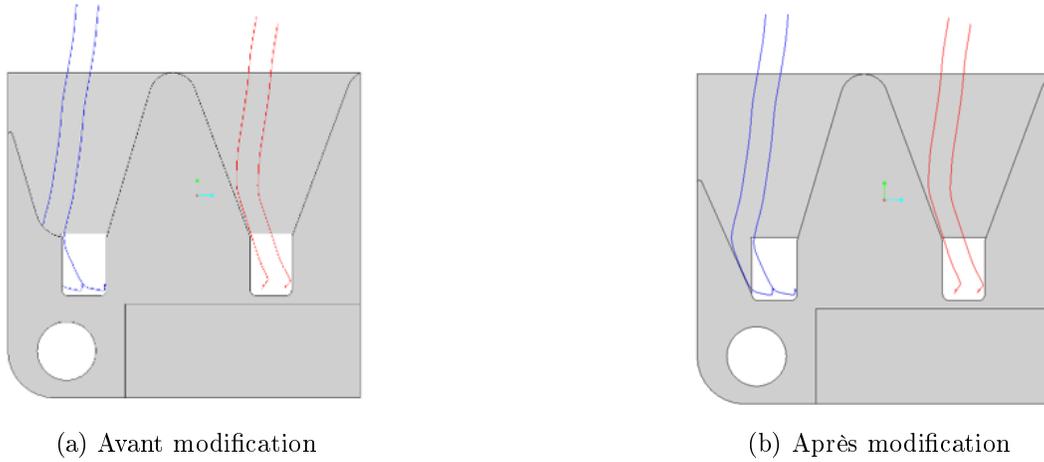


FIGURE 2.16 – Trajectoire des points A et B

Dans ce chapitre, nous avons donc choisi la section rectangulaire évidée qui est la plus adaptée à notre problème. Puis, nous avons modélisé les maillons, les liaisons entre ceux-ci et les *snap-fits* permettant leur emboîtement. Enfin, nous avons conçu une ébauche du guide convergent permettant l'assemblage et le désassemblage des chaînes, et nous avons modifié les *snap-fits* afin d'éviter les collisions entre les maillons.

Chapitre 3

Conception du mécanisme d'engrènement

Après avoir modélisé les deux chaînes et le guide convergent, il est nécessaire de concevoir le système d'engrènement pouvant être motorisé, et permettant de faire avancer les maillons par rapport au guide.

3.1 Choix du système d'engrènement

Nous souhaitons concevoir un système d'engrènement transformant un mouvement de rotation en un mouvement de translation rectiligne. Il doit être facilement adaptable aux maillons et être contenu dans le guide afin d'obtenir un ensemble compact. Nous cherchons donc à implanter l'actionneur de ce système dans le guide. Les maillons composant les chaînes devront être actionnés l'un après l'autre. L'actionneur doit donc pouvoir être en contact avec chaque maillon lors de la transformation de mouvement. Par conséquent, la partie actionnée ne peut être fixée au bâti, c'est-à-dire le guide. Plusieurs systèmes permettent de transformer un mouvement de rotation en mouvement de translation comme le système à vis et écrou, le système à bielle et manivelle, le système à pignon et crémaillère et le système à came et galet. Nous allons discuter de la faisabilité de chacune de ces solutions :

- D'abord, le système à vis et écrou permet d'exercer des efforts importants. Cependant, il génère beaucoup de frottements et engendre des problèmes de guidage à cause de sa fragilité. De plus, ce système est lent, à moins d'avoir un pas de vis important. Il paraît également compliqué de l'intégrer à notre système car la partie actionnée est fixée au bâti.
- Puis, le système à bielle et manivelle permet d'obtenir une grande vitesse de translation mais une telle vitesse n'est pas nécessaire dans notre cas. Ce système génère également beaucoup de frottement et est difficile à mettre en place pour notre configuration, car

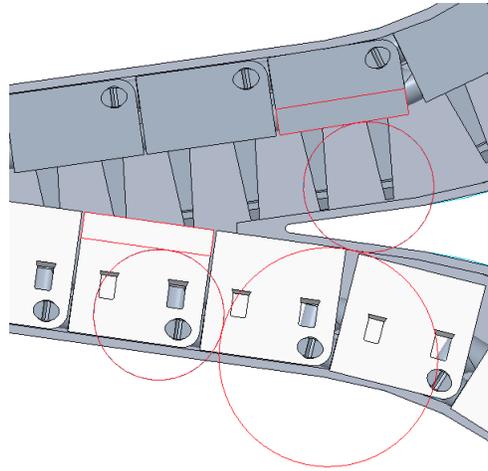
la partie actionnée est fixée au bâti.

- Ensuite, le système à pignon et crémaillère nécessite un ajustement précis entre la roue et la crémaillère mais ne présente pas de glissement. De plus, une crémaillère pourrait être facilement intégrée aux maillons car elle n'est pas fixée au bâti.
- Enfin, le système à came et galet est un système irréversible. Afin de translater le galet, la came doit être actionnée. Néanmoins, il semble difficile d'adapter ce système pour permettre la translation des maillons dans notre espace restreint. De plus, la partie actionnée est fixée au bâti.

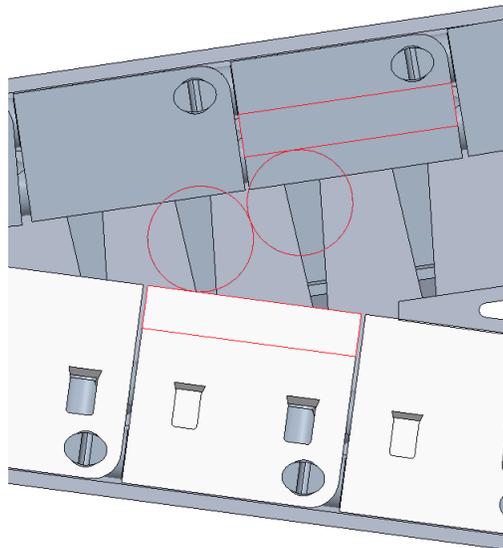
En tenant compte de la configuration des pièces dans l'espace, nous constatons que le système pignon crémaillère répondrait plus aisément au cahier des charges. En effet, celui-ci est plus facilement adaptable à notre système et sera également plus compact. Nous utiliserons des engrenages droits à axes parallèles.

3.2 Conception de la crémaillère intégrée aux maillons et contraintes associées

Afin que les maillons translatent le long du guide, il est nécessaire de lier les crémaillères sur les maillons des chaînes. Il serait possible d'intégrer la crémaillère à une seule chaîne ou aux deux chaînes et par conséquent d'utiliser une ou deux roues dentées. Cependant, afin que les efforts soient mieux répartis et pour que les liaisons *snap-fits* ne soient pas sollicitées, nous choisissons d'intégrer la crémaillère aux deux chaînes, et donc d'utiliser deux roues dentées. Plusieurs configurations s'offrent alors à nous, comme le montrent les sous-figures 3.1a et 3.1b. Dans un premier temps, nous avons esquissé la future crémaillère représentée par un rectangle comme nous pouvons le voir sur la figure 3.1 tandis que les roues dentées sont représentées par des cercles. Plusieurs contraintes devaient être respectées : les cercles et les rectangles sont obligatoirement tangents, les chaînes doivent translater dans la même direction, il est donc essentiel de prendre en compte le sens de la rotation des engrenages. Une troisième configuration aurait pu être envisagée en intégrant la configuration des engrenages de la première solution dans la deuxième solution, mais cela donnerait des engrenages bien trop petits à imprimer. Nous choisissons la deuxième configuration car elle permet de concevoir tout le mécanisme pignon crémaillère dans l'espace déjà occupé par le guide. De cette façon, le mécanisme n'occupe pas plus d'espace.



(a) Première configuration



(b) Deuxième configuration

FIGURE 3.1 – Configurations du système à pignon et crémaillère

Sur la figure 3.2, nous remarquons qu'il existe un espacement $a = 0,6$ mm entre chaque maillon lorsque ceux-ci sont sur une surface plane. Afin d'obtenir un pas constant, nous devons en tenir compte dans la conception. Nous allons donc déterminer le pas de la crémaillère.

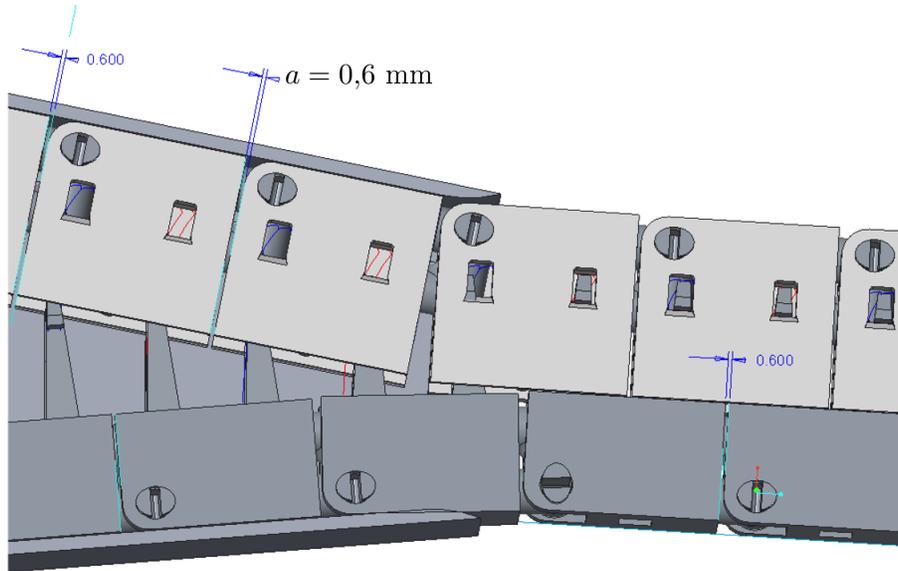


FIGURE 3.2 – Espacement entre les maillons

La figure 3.3 illustre la géométrie entre deux maillons d'une même chaîne. Soient, L_c la longueur d'un maillon, T la distance entre le point se trouvant sur la ligne primitive de la dent jusqu'au bout de la crémaillère et P le pas de la crémaillère. Tout d'abord, nous voudrions que le nombre de dents soit un entier naturel, le pas doit donc être un diviseur de L_c . Or nous savons que dans notre configuration, $L_c = 30$ mm.

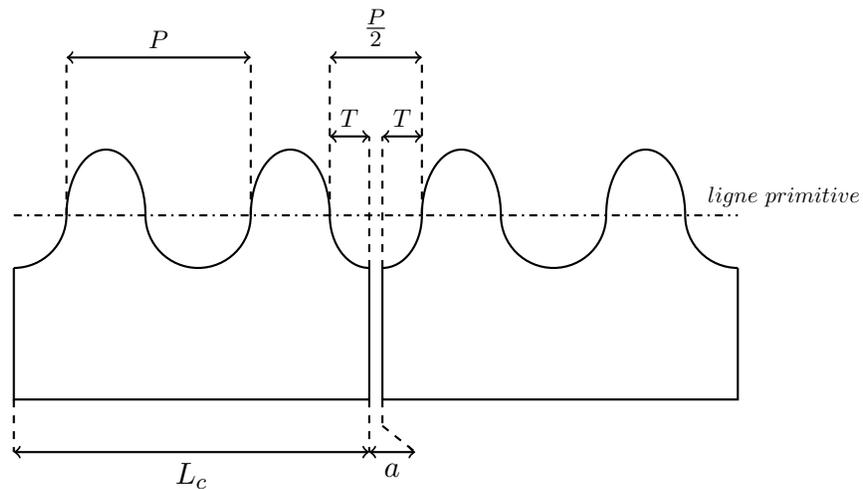


FIGURE 3.3 – Géométrie de la crémaillère

D'après la figure 3.3 nous constatons que :

$$P = 4T + 2a \quad (3.1)$$

Ainsi pour connaître la valeur du pas, il est nécessaire de déterminer T . Pour cela, nous nous appuyons sur la figure 3.4 qui est une représentation de la géométrie en fond de dent d'une crémaillère.

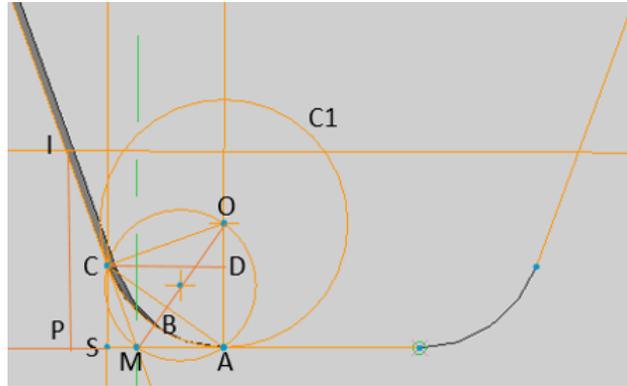


FIGURE 3.4 – Schéma du fond d'une dent

Les détails des paramètres de ce schéma sont donnés-ci dessous :

- C et A sont les points aux extrémités du fond de dent formant le congé.
- I est l'intersection de la ligne primitive de la crémaillère avec la ligne inclinée de α .
- P est la projection orthogonale du point I sur la droite portant A , ce qui signifie que la distance $\overline{IP} = h_f$, où h_f est le creux de la dent.
- S est la projection orthogonale du point C sur la droite de fond de dent portant A .
- Le point M est le point formé par l'intersection des droites (IC) et (AP) .
- Le point O est le centre du cercle C_1 formé par le congé en fond de dent de rayon égal à $0,38m$, où m est le module de la dent.
- D est la projection orthogonale du point C sur la droite (OA) . Nous constatons qu'un autre cercle peut être créé en passant par les points C , M , A et O et que la bissectrice de l'angle COA est perpendiculaire à la droite (CA) en B et passe par M .

Nous pouvons alors identifier plusieurs triangles rectangles qui nous permettront de calculer T . Cependant, il est d'abord nécessaire de déterminer tous les angles nécessaires se trouvant à la figure 3.4. Le seul angle connu est l'angle d'inclinaison des dents de la crémaillère \widehat{PIM} égal à $\alpha = 20^\circ$. En analysant cette figure nous pouvons déterminer l'expression des différents angles à partir de α qui sont répertoriés dans le tableau 3.1.

TABLEAU 3.1 – Angle en fond de dent

Désignation angle	Expression
\widehat{PIM}	α
\widehat{AMC}	$\frac{\pi}{2} + \alpha$
\widehat{CAM}	$\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$
\widehat{CAO}	$\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$
\widehat{COA}	$\frac{\pi}{2} - \alpha$
\widehat{DCA}	$\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$
\widehat{DCO}	α

D'après la figure 3.4, T serait égal à la distance suivante :

$$T = \overline{PA} = \overline{PS} + \overline{SA} = \overline{PS} + \overline{DC} \quad (3.2)$$

Soit le triangle OAM rectangle en A , nous pouvons alors écrire :

$$\overline{AM} = \overline{OA} \tan\left(\frac{\widehat{COA}}{2}\right) \quad (3.3)$$

Soit le triangle ABM rectangle en B , nous en déduisons que :

$$\overline{AB} = \overline{AM} \cos(\widehat{CAM}) \quad (3.4)$$

D'après la figure 3.4, nous avons :

$$\overline{AC} = 2\overline{AB} \quad (3.5)$$

Soit le triangle ADC rectangle en D , nous avons donc :

$$\overline{AD} = \overline{AC} \sin(\widehat{DCA}) \quad (3.6)$$

$$\overline{DC} = \overline{AC} \cos(\widehat{DCA}) \quad (3.7)$$

D'après les équations 3.3, 3.4 et 3.5 nous avons :

$$\overline{AD} = 2\overline{OA} \tan\left(\frac{\widehat{COA}}{2}\right) \cos(\widehat{CAM}) \sin(\widehat{DCA}) \quad (3.8)$$

D'après les équations 3.2, 3.3 et 3.4 nous en déduisons que :

$$\overline{DC} = 2\overline{OA} \tan\left(\frac{\widehat{COA}}{2}\right) \cos(\widehat{CAM}) \cos(\widehat{DCA}) \quad (3.9)$$

Soit le triangle IPM rectangle en P , nous pouvons donc écrire :

$$\overline{PM} = \overline{IP} \tan(\alpha), \quad (3.10)$$

où $\overline{IP} = h_f$.

Soit le triangle CSM rectangle en S , nous avons alors :

$$\overline{SM} = \overline{CS} \tan(\alpha) \quad (3.11)$$

D'après la figure 3.4 $\overline{CS} = \overline{AD}$, nous avons alors :

$$\overline{SM} = \overline{AD} \tan(\alpha) \quad (3.12)$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\overline{PS} = \overline{PM} - \overline{SM} = \tan(\alpha)(\overline{IP} - \overline{AD}) \quad (3.13)$$

De plus nous savons que $\overline{CD} = \overline{SA}$ alors d'après l'équation 3.2 nous avons :

$$T = \overline{PS} + \overline{DC} \quad (3.14)$$

$$= 2\overline{OA} \tan\left(\frac{\widehat{COA}}{2}\right) \cos(\widehat{CAM}) \left(\cos(\widehat{DCA}) - \tan(\alpha) \sin(\widehat{DCA})\right) + h_f \tan(\alpha) \quad (3.15)$$

Or nous avons :

$$h_f = \frac{P}{\pi}(1,25 - x) \quad (3.16)$$

$$\overline{OA} = \frac{P}{\pi}0,38 \quad (3.17)$$

Nous obtenons ainsi l'expression de T suivante :

$$T = P \left(\frac{2 \times 0,38}{\pi} \tan\left(\frac{\widehat{COA}}{2}\right) \cos(\widehat{CAM}) \left(\cos(\widehat{DCA}) - \tan(\alpha) \sin(\widehat{DCA})\right) + \tan(\alpha) \frac{(1,25 - x)}{\pi} \right) \quad (3.18)$$

D'après l'équation 3.1 et après simplification, nous obtenons la relation suivante :

$$P = \frac{2a\pi}{\pi - 3,04 \tan\left(\frac{\widehat{COA}}{2}\right) \left(\cos(\widehat{DCA}) - \tan(\alpha) \sin(\widehat{DCA})\right) - 4 \tan(\alpha)(1,25 - x)} \quad (3.19)$$

où x est une constante que nous avons choisie égale à 0,53.

Nous constatons donc que P dépend de α , de a et de x . Le pas ne dépend que de valeurs constantes donc le pas est une constante. Après une application numérique, nous obtenons la valeur suivante : $P = 3,65$ mm. Afin que le nombre de dents soit un entier naturel, le pas doit être un diviseur de L_c . Or le pas a une valeur fixe, ce qui signifie que nous allons faire varier la longueur du maillon L_c . Nous choisirons donc le nombre de dents qui nous donnera une longueur de maillon L_c la plus proche possible de la valeur initiale, c'est-à-dire 30 mm.

Soit L_d la nouvelle longueur du maillon, Z_c le nombre de dents. Nous constatons que, quel que soient le pas et le nombre de dents nous obtenons la formule suivante :

$$L_d = (Z_c - 1)P + \frac{P}{2} + 2T \quad (3.20)$$

Nous faisons alors varier Z_c pour avoir différentes valeurs de L_d comme sur le tableau 3.2.

TABLEAU 3.2 – Valeurs de L_d en fonction de Z_c

Z_c	L_d (mm)
8	28,62
9	35,23

Nous choisissons donc $Z = 8$ car c'est dans ce cas où L_d est le plus proche de 30 mm. Ayant déterminé le pas, le nombre de dents et la longueur d'un maillon, il est désormais possible de concevoir la crémaillère. La figure 3.5 montre le modèle CAO de la crémaillère intégrée au maillon mâle et au maillon femelle.

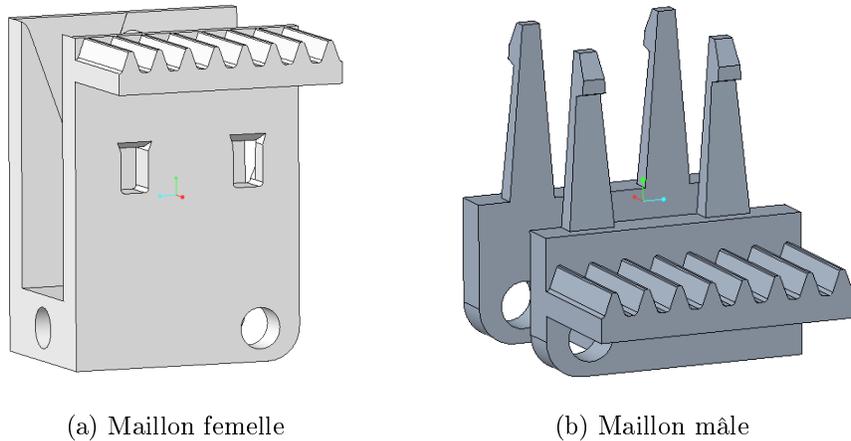


FIGURE 3.5 – CAO des maillons

3.3 Conception de l'engrenage

Après avoir conçu les crémaillères intégrées aux maillons, nous allons désormais nous intéresser à la conception de l'engrenage. À l'aide des formules de dimensionnement des roues dentées ((10) et (22)), nous pouvons dimensionner notre engrenage. Plusieurs conditions doivent être respectées lors de la conception de l'engrenage afin d'assurer son bon fonctionnement :

- Pour qu'il y ait engrènement entre les roues dentées et la crémaillère, le pas de la crémaillère et de l'engrenage doivent être identiques.
- Pour qu'il y ait engrènement entre les deux roues dentées, le pas doit être le même.
- Les crémaillères et donc les deux chaînes doivent avancer avec la même vitesse, il faut alors que les roues dentées aient le même nombre de dents. Autrement dit, les crémaillères et l'engrenage doivent avoir le même module.

3.3.1 Interférence de taillage

Une roue dentée est fabriquée à l'aide d'une crémaillère de taillage. Le phénomène d'interférence de taillage intervient lorsque le nombre de dents est petit, en effet, le taillage du profil complet peut engendrer une interférence entre la développante de cercle et la courbe de raccordement au cercle de pied. L'équation 3.21 (9) nous donne le nombre de dents limite.

$$Z_{lim} = \frac{2(1-x)}{\sin^2 \alpha} \quad (3.21)$$

Dans le cas général, le nombre de dents limite Z_{lim} est de 17 pour une denture non déportée, c'est-à-dire que le coefficient de déport x est nul et que l'angle de pression α est de 20° . En réalité, nous utilisons une imprimante 3D pour la fabrication des engrenages, donc nous n'avons pas à respecter cette condition. Cependant, nous nous basons sur cette condition pour choisir le nombre de dents de notre engrenage dans le cas où nous changerons de matériau pour un projet futur. En l'occurrence, nous choisissons un nombre de dents de 17.

3.3.2 Coefficient de déport

Le coefficient de déport de denture x permet d'augmenter l'épaisseur de dent afin que cette dernière soit plus résistante aux efforts. Or cet effort n'est pas connu, il est alors plus judicieux d'instaurer un coefficient de déport sur les engrenages. Nous notons que x entraîne un déport de denture w .

$$w = xm \quad (3.22)$$

Ce déport de denture a plusieurs conséquences sur la géométrie de l'engrenage :

- Les cercles de tête et de pied sont déportés de w . Si le coefficient de déport est positif, alors la ligne de référence est extérieure au cercle primitif de référence. S'il est négatif

la ligne de référence coupe le cercle primitif de référence. Nous pouvons observer ce phénomène sur la figure 3.6 :

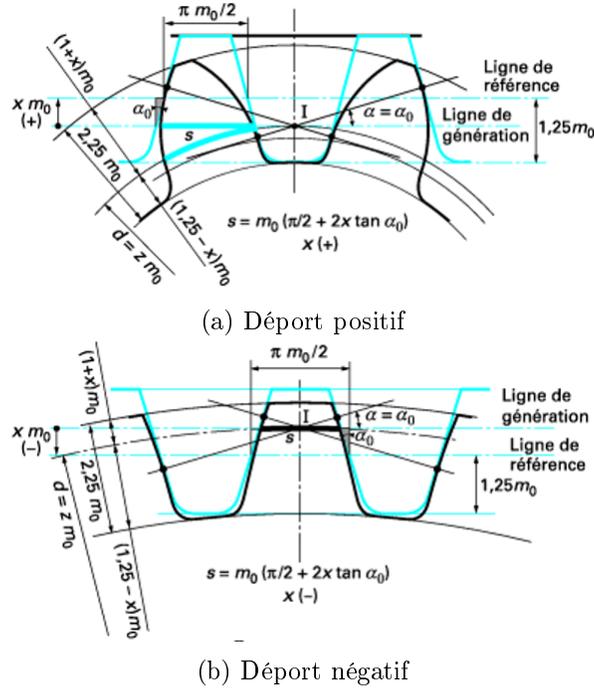


FIGURE 3.6 – Effet du déport sur la géométrie de l’engrenage (22)

- La ligne de référence de l’engrenage n’est plus tangente au cercle primitif mais devient tangente au cercle de fonctionnement. Nous pouvons voir la différence de la position de la ligne primitive entre la figure 3.6 et la figure 3.7.

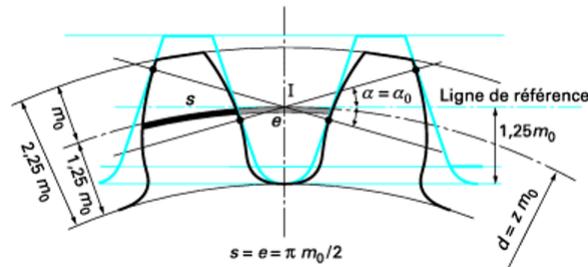


FIGURE 3.7 – Effet du déport sur la ligne de référence de l’engrenage (22)

Par conséquent lors de l’engrènement, ce ne sont plus les cercles primitifs qui roulent sans glisser les uns sur les autres mais les cercles de fonctionnement. Ce qui fait alors varier l’entraxe entre l’engrenage : il n’est plus la somme des rayons primitifs, mais la somme des rayons en fonctionnement.

- Enfin, comme mentionné auparavant, le déport influence la forme de la dent en faisant varier son épaisseur au niveau du cercle primitif comme le montre la figure 3.8. Un

déport positif augmente l'épaisseur de dent, la rend plus résistante, mais l'épaisseur au niveau du cercle de tête diminue. Un déport négatif augmente l'épaisseur de tête mais, la dent se creuse progressivement au niveau de son pied.

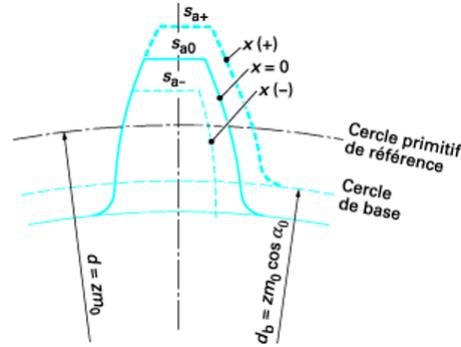


FIGURE 3.8 – Dentures avec déports négatif, nul et positif, ayant le même cercle primitif de référence et le même cercle de base (22)

À l'aide de l'abaque ci-dessous, recommandé par la norme ISO, nous pouvons choisir nos paramètres. L'indice 1 correspond au pignon et l'indice 2 à la roue.

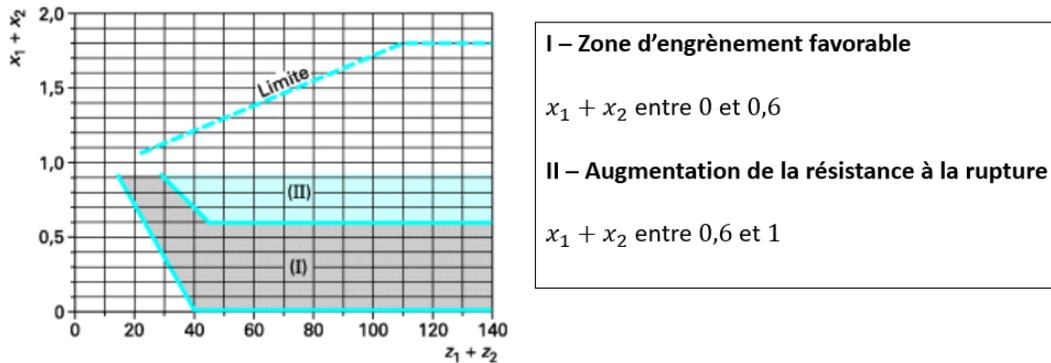


FIGURE 3.9 – Recommandations ISO pour la somme des déports (22)

Nous demeurerons dans la zone (I) pour obtenir un engrènement favorable. Ayant choisi un nombre de dent de 17 pour chacune de nos roues dentées, nous obtenons alors la somme suivante : $Z_1 + Z_2 = 34$. D'après l'abaque nous pouvons faire varier cette somme $x_1 + x_2$ de 0,2 à 0,8. Nous choisissons donc $x_1 + x_2 = 0,2$. Nous choisissons : $x_1 = 0,15$ et $x_2 = 0,05$.

Le déport modifie donc l'entraxe entre les roues dentées mais aussi celui de la crémaillère. En effet, en rajoutant du déport de 0,53 mm sur la denture de la crémaillère pour la rendre plus résistante, la ligne de référence de la crémaillère est déportée de w_c et devient la ligne de fonctionnement comme nous pouvons le voir sur la figure 3.10. C'est donc cette ligne de fonctionnement qui doit être tangente au cercle de fonctionnement de la roue dentée.

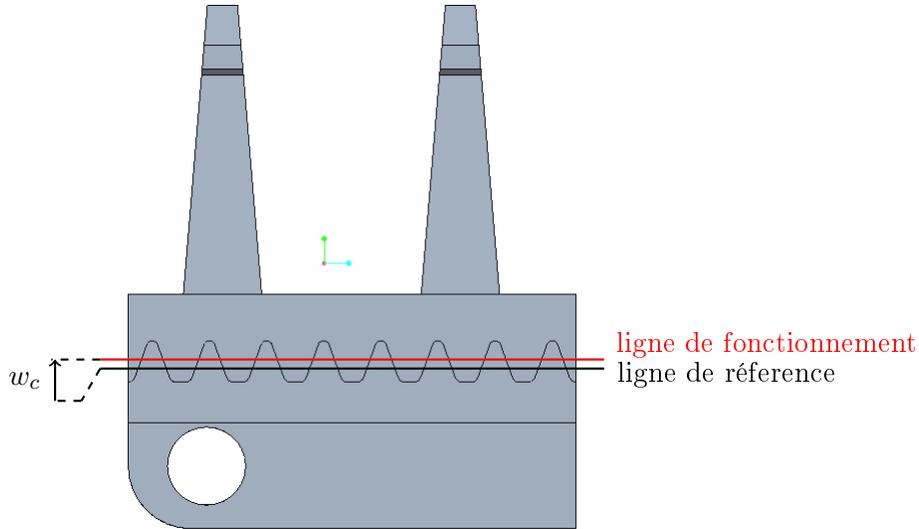


FIGURE 3.10 – Déport de la ligne de référence de la crémaillère

3.3.3 Conditions géométriques d’engrènement

Afin d’assurer l’engrènement, nous devons respecter plusieurs conditions géométriques énumérées ci-dessous :

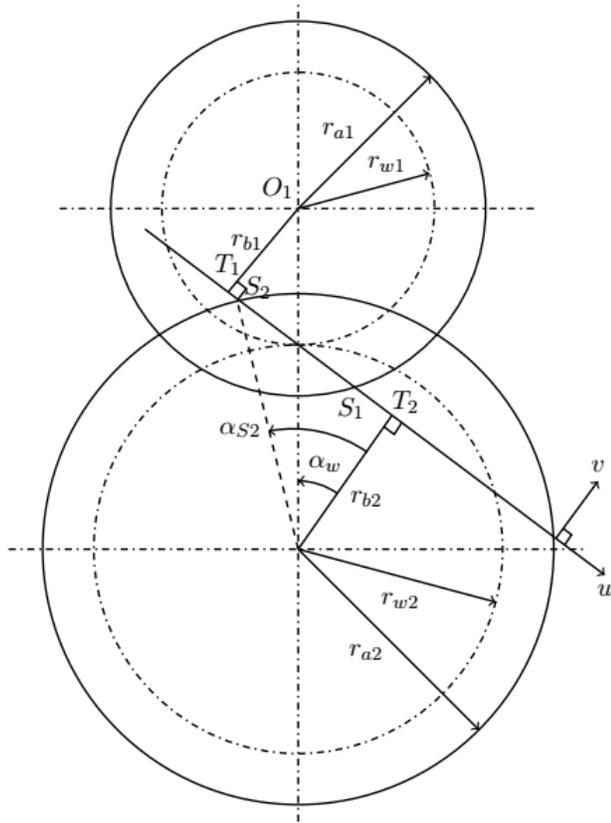
1. Le rapport de transmission i entre les deux roues doit toujours rester constant. Cela se traduit par la relation suivante :

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{N_1}{N_2} = \text{constante} \quad (3.23)$$

Où ω est la vitesse de rotation en rad/s et N , la vitesse de rotation en tr/min.

2. À chaque instant de l’entraînement, le mouvement doit se transmettre au moins par une paire de dents.

Pour que l’engrènement reste continu dans un engrenage, il faut qu’il existe toujours au moins un profil de dent du pignon en contact avec un profil de dent de la roue. Ainsi, il faut que les profils suivants viennent en contact avant que les profils en engrènement se quittent au point situé sur le cercle de tête de la roue menante. La longueur de conduite est donc la ligne d’action limitée par les deux circonférences de tête. Pour respecter la deuxième condition il faut que le rapport de conduite soit supérieure à 1,2 (10). Cette longueur ainsi que le calcul du rapport de conduite sont donnés sur la figure 3.11.



Continuité de l'engrènement :

$$\epsilon_\alpha > 1,2$$

$$\epsilon_\alpha = \frac{\text{longueur d'engrènement sur la ligne de pression}}{\text{pas de base}}$$

$$= \frac{S_1 S_2}{p_b}$$

Avec :

$$S_1 S_2 = S_1 T_1 - T_1 T_2 + T_2 S_2$$

$$S_1 T_1 = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}$$

$$S_2 T_2 = \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}$$

$$T_1 T_2 = a_w \sin(\alpha_w)$$

Où bien :

$$T_2 S_2 = r_{a2} \sin(\alpha_{S2})$$

$$= r_{b2} \tan(\alpha_{S2})$$

FIGURE 3.11 – Détermination du rapport de conduite (6)

Grâce à ces données, nous sommes désormais capables de déterminer les paramètres du pignon et de la roue donnés dans le tableau 3.3. Les grandeurs en fonctionnement sont notées avec l'indice w . Des détails de ces calculs sont donnés en annexe. Nous constatons que le rapport de conduite est bien supérieur à 1,2, la condition d'engrènement est alors respectée.

TABLEAU 3.3 – Valeurs des paramètres de l’engrenage

Paramètre	Pignon	Roue	Paramètre engrenage	Unité
Angle de pression α	-	-	20	degré
Nombre de dents Z	17	17	-	mm
Coefficient de déport x	0,15	0,05	-	mm
Déport de denture w	0,1744	0,05813	-	-
Pas p	-	-	3,6527	mm
Module m	-	-	1,1627	mm
Rayon primitif r	9,8829	9,8829	-	mm
Rayon de base r_b	9,2869	9,2869	-	mm
Rayon de tête r_a	11,2200	11,1038	-	mm
Rayon de pied r_f	8,6040	8,4877	-	mm
$inv(\alpha)$	-	-	0,01490	-
$inv(\alpha_w)$	-	-	0,01919	-
α_w	-	-	21,69	degré
Rayon de fonctionnement r_w	-	-	9,9946	mm
Entraxe a	-	-	19,7658	mm
Entraxe en fonctionnement a_w	-	-	19,9891	mm
Saillie de la dent h_a	1,3371	1,2208	-	mm
Creux de la dent h_f	1,2789	1,3952	-	mm
Hauteur de la dent	2,6160	2,6161	-	mm
Largeur de la dent	-	-	11,6270	mm
S_1T_1	-	-	6,2962	mm
S_2T_2	-	-	6,0866	mm
T_1T_2	-	-	7,3877	mm
S_1S_2	-	-	4,9951	mm
Pas de base p_b	-	-	3,4324	mm
Rapport de conduite ϵ_α	-	-	1,4553	-

3.3.4 Développante de cercle

Le profil en développante de cercle est celui qui est le plus utilisé car il est insensible aux variations de l’entraxe. En effet, lorsque la dent tourne autour du centre de la roue, le profil de celle-ci reste perpendiculaire à une droite fixe, appelée développante de cercle.

La développante de cercle est la courbe décrite par un point P d’une droite qui roule sans glisser sur le cercle de base. Deux paramètres principaux contrôlent la trajectoire de la courbe de la développante de cercle : le diamètre du cercle de base et l’angle d’inclinaison de la droite qui porte un point P_1 quelconque de coordonnées (x, y) . Pour construire une développante de cercle, nous divisons le cercle de base en quatre.

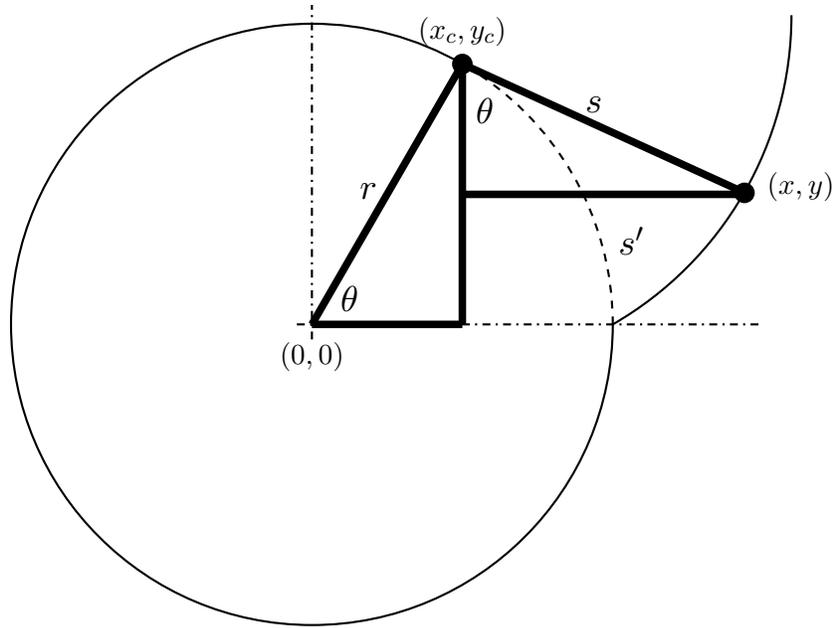


FIGURE 3.12 – Développante de cercle

Nous souhaitons obtenir les coordonnées x et y décrivant le déplacement du point P sur la courbe de la développante de cercle. Nous allons d'abord exprimer les coordonnées x_c et y_c d'un point p sur le cercle de base avec $\theta = \alpha$ et $r = r_b$ en se basant sur la figure 3.12 :

$$x_c = r_b \cos(\alpha) \quad (3.24)$$

$$y_c = r_b \sin(\alpha) \quad (3.25)$$

Nous obtenons donc l'équation de la développante de cercle :

$$x = x_c + s \sin(\alpha) \quad (3.26)$$

$$y = y_c - s \cos(\alpha) \quad (3.27)$$

Dans le logiciel de modélisation CAO CREO, il est possible de générer des développantes de cercle à partir d'équations paramétriques cartésiennes. Le paramètre t du logiciel exprime une variation sur la longueur de la développante allant de 0 à 1. Etant donné que nous étudions seulement un quart du cercle, l'angle de variation maximal est de 90° . L'angle de variation sera donc de $90 \times t$, autrement dit, il varie de 0° à 90° . Nous notons S , l'abscisse curviligne, nous avons alors :

$$S = \frac{r_b \pi t}{2} \quad (3.28)$$

Nous renseignons ces équations dans le logiciel en s'assurant que la coordonnée z soit toujours nulle. Avec toutes ces informations nous sommes à même de concevoir notre engrenage et de le placer à bonne distance pour assurer l'engrènement.

3.4 Assemblage

Nous avons déterminé précédemment l'emplacement approximatif du mécanisme. Un guide supérieur ou couvercle comportant deux alésages permettra de positionner les axes des engrenages. Cependant, certaines contraintes de dimension au niveau des crémaillères et des roues dentées doivent être respectées. En effet, pour que le système fonctionne, il faut non seulement que les roues dentées s'engrènent correctement, mais aussi qu'elles engrènent avec leurs crémaillères respectives uniquement. Par conséquent, les cercles de fonctionnement des roues dentées, déterminés précédemment, doivent être tangents entre eux. De plus, chacun de ces cercles doit être tangent avec la ligne fonctionnelle de sa crémaillère. Nous souhaitons que l'engrènement s'effectue dans la partie linéaire du guide. En connaissant chacun de ces paramètres et en positionnant les maillons le long du guide dans la simulation CAO, nous sommes capables d'obtenir les positions des axes des roues dentées, comme le montre la figure 3.13.

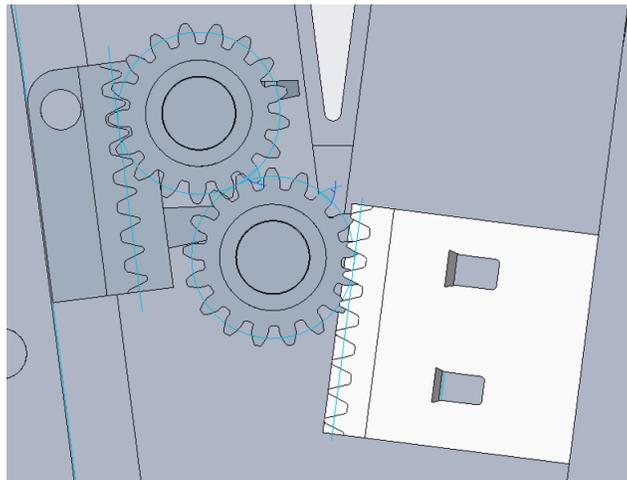


FIGURE 3.13 – Position des roues dentées

Afin de faciliter le montage, les roues dentées ont été intégrées à leurs axes respectifs qui seront bloqués en translation par un épaulement d'un côté et une bague démontable de l'autre. Nous utilisons des goupilles similaires à celles utilisées pour les maillons pour bloquer ces bagues en rotation et en translation. Le mécanisme est actionnable grâce à une manivelle. L'ensemble est représenté en vue éclatée sur la figure 3.14.

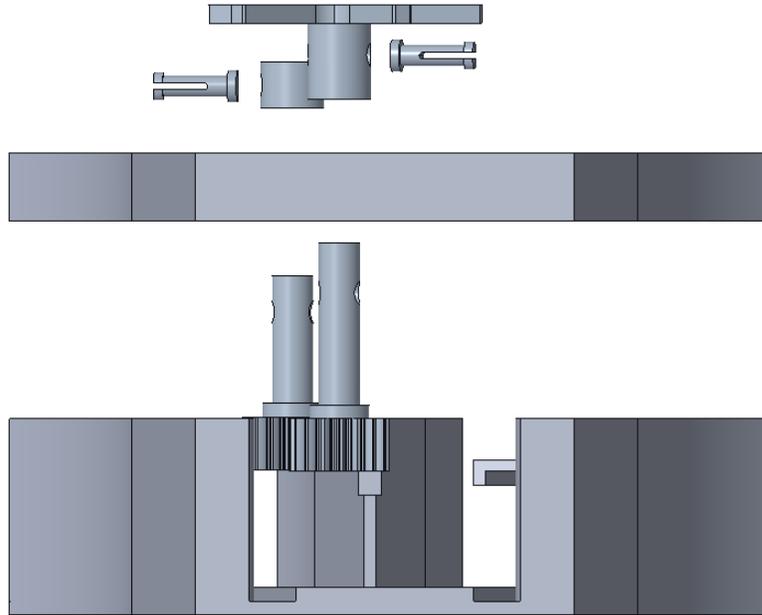


FIGURE 3.14 – Vue éclatée du système

Dans ce chapitre, nous avons choisi le système à pignon et crémaillère afin de translater les maillons le long du guide. Nous avons alors intégré la crémaillère aux maillons en tenant compte des spécificités du système, notamment en assurant que les espaces entre les maillons coïncident avec des creux des dents de la crémaillère. Le résultat est un engrenage compact, résistant aux efforts et facilement adaptable à notre mécanisme. Après avoir conçu les maillons, le guide et le système d'engrènement, nous cherchons désormais à optimiser les paramètres de ce système pour maximiser le volume de travail du robot.

Chapitre 4

Optimisation des paramètres du robot

Dans cette partie, nous allons optimiser les paramètres du guide convergent, des chaînes, de manière à maximiser le volume de travail du robot. Pour cela, nous utiliserons un algorithme implanté dans Matlab. Dans un premier temps, nous définirons la fonction à optimiser, puis nous présenterons les différentes variables et enfin nous déterminerons les contraintes auxquelles est soumis le système. Cela nous permettra de réaliser l'optimisation des paramètres du robot. Nous terminerons par une vérification des résultats obtenus.

4.1 Fonction à optimiser : détermination du volume de travail

Nous cherchons à maximiser le volume de travail du robot déterminé au chapitre 1. La fonction à optimiser est donc la suivante :

$$V_w = \frac{1}{3}(L_p^3 - (L_p - L_{pm})^3)\beta(1 - \cos(\gamma)) \quad (4.1)$$

Avec :

- la longueur de la poutre déployée L_p ;
- la longueur des maillons déployés L_{pm} ;
- β , l'angle de débattement autour de l'axe y , égal à 170° ;
- γ , l'angle de débattement autour de l'axe z .

4.2 Présentation des variables à optimiser et celles qui sont fixées

Afin d'optimiser les performances du robot, il est essentiel de paramétrer sa géométrie. Nous nous intéresserons en particulier aux variables de la poutre, des maillons et du guide. Dans cette partie, nous utiliserons le code couleur suivant pour faciliter la lecture des schémas :

- les variables à optimiser sont représentées en rouge ;

- les données fixées sont illustrées en vert ;
- les variables intermédiaires sont symbolisées en bleu. Elles dépendent des variables à optimiser et des données fixées, et permettent de simplifier les calculs et d'alléger les schémas pour faciliter leur compréhension.

4.2.1 Variables de la poutre

Les variables de la poutre à optimiser, définies à la figure 4.1, sont :

- la longueur des maillons déployés L_{pm} ;
- la longueur de la première partie du joint de cardan L_a ;
- la longueur de la deuxième partie du joint de cardan L_r .

Ces variables ne dépendent pas de la géométrie des maillons et du guide déterminée dans le chapitre 2. Par conséquent, elles sont libres.

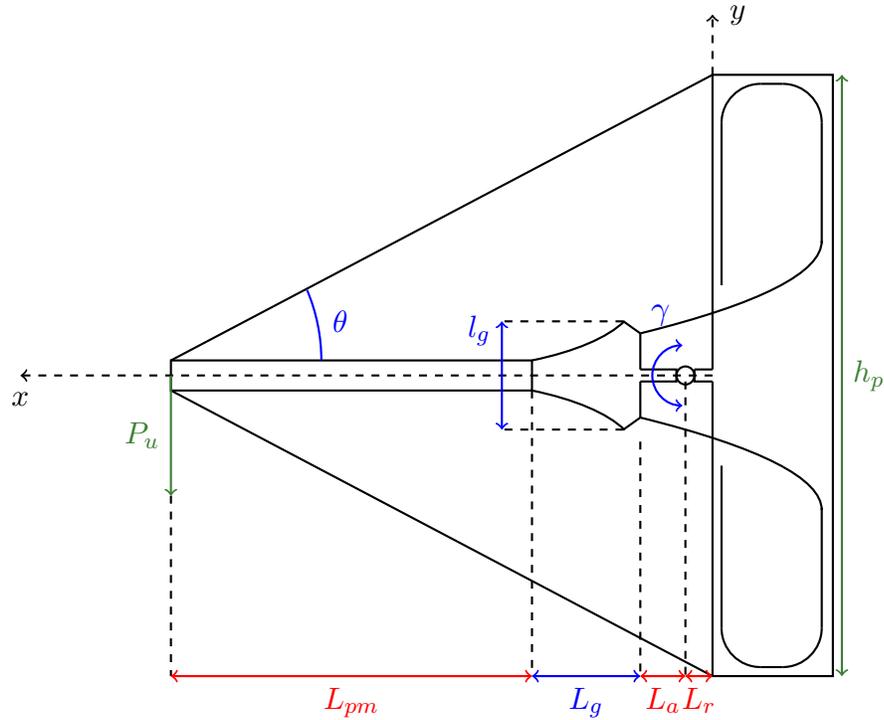
Les données fixées sont :

- la charge utile P_u égale à 98,1 N qui a été fixé dans le chapitre 1 ;
- β , l'angle de débattement autour de l'axe y égal à 170° , fixé également dans le chapitre 1 ;
- la distance entre les deux extrémités des câbles h_p . Nous testerons trois distances différentes : 750, 875 et 1000 mm afin de simuler différentes tailles de réservoir. Cela nous permet de modéliser différents angles d'inclinaison des câbles pour comprendre leurs influences sur la résistance du système.

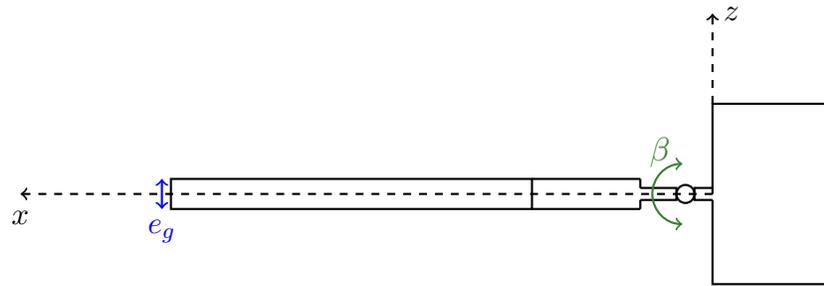
Les variables intermédiaires sont :

- la longueur du guide L_g ;
- la largeur du guide l_g ;
- l'épaisseur de la poutre e_g ;
- l'angle d'inclinaison des câbles θ ;
- γ , l'angle de débattement autour de l'axe z .

Ces variables sont illustrées sur les figures 4.1a et 4.1b.



(a) Vue de côté



(b) Vue de dessus

FIGURE 4.1 – Schéma de la poutre paramétrée

4.2.2 Variables des maillons

Les variables des maillons sont :

- la largeur du maillon l_m (identique pour les maillons mâle et femelle) ;
- la hauteur du maillon femelle h_{mf} ;
- la hauteur du maillon mâle h_{mm} .

Ces variables sont libres car elles n'ont pas d'incidence sur le dimensionnement des *snap-fits* ou des liaisons entre les maillons.

Les données fixées sont :

- la hauteur des parois des maillons $h_{em} = 8$ mm, imposée par les liaisons pivots entre les maillons déterminées à la section 2.2 ;
- la largeur des parois des maillons, $l_{em} = 4$ mm, déterminée à la sous-section 2.3.2 lors de la conception des *snap-fits* ;
- la hauteur des parties en porte à faux (ou *cantilever*) des *snap-fits*, $h_c = 18,5$ mm, a été fixé lors du dimensionnement des *snap-fits* dans la sous-section 2.3.2.

Les variables et les données fixées du maillon mâle sont représentées à la figure 4.2 et celles du maillon femelle à la figure 4.3.

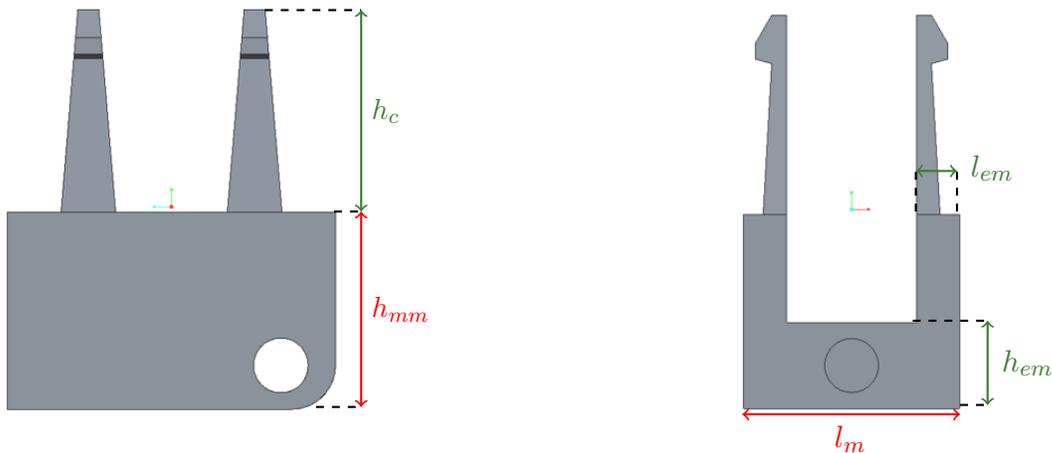


FIGURE 4.2 – Schéma de la pièce mâle

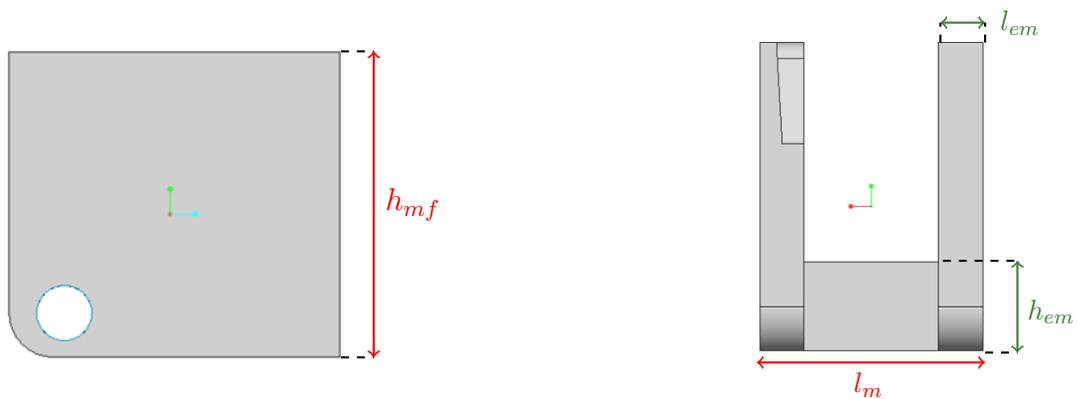


FIGURE 4.3 – Schéma de la pièce femelle

4.2.3 Variables du guide

Les variables du guide à optimiser, qui sont laissées libres dans le modèle CAO, sont :

- l'angle de convergence α ;
- le rayon intérieur droit du guide R_1 ;

— le rayon extérieur droit du guide R_2 .

Les données fixées sont :

- l'épaisseur des parois, $e = 2$ mm ;
- la longueur supérieure du convergent, $h_1 = 20$ mm ;
- la longueur du "v" du convergent, $h_2 = 5$ mm ;
- la longueur horizontale du guide, $l_h = 70$ mm ;
- la largeur de la découpe du guide, $h_d = 38$ mm ;
- l'angle de découpe du guide, $\beta_d = 26,5^\circ$.

Ces données fixées sont imposées lors de la conception CAO du guide dans le chapitre 2. En effet, nous nous basons sur les données de notre premier prototype qui permettait d'effectuer correctement l'assemblage et le désassemblage des deux chaînes.

Nous retrouvons également la variable intermédiaire l_g , la largeur du guide, permettant de déterminer les paramètres de découpe du guide.

Ces variables et données fixées sont représentées à la figure 4.4. Celles qui concernent la découpe du guide, définie à la sous section 2.4.1, sont montrées à la figure 4.5, la zone représentée en pointillés marrons correspond à la zone de découpe du guide. Cette découpe permet d'augmenter le débattement angulaire γ selon l'axe z . Afin de faciliter la lecture du schéma, nous représenterons ces paramètres d'un seul côté du guide, mais les découpes se feront à la même hauteur d'un côté de l'autre du guide.

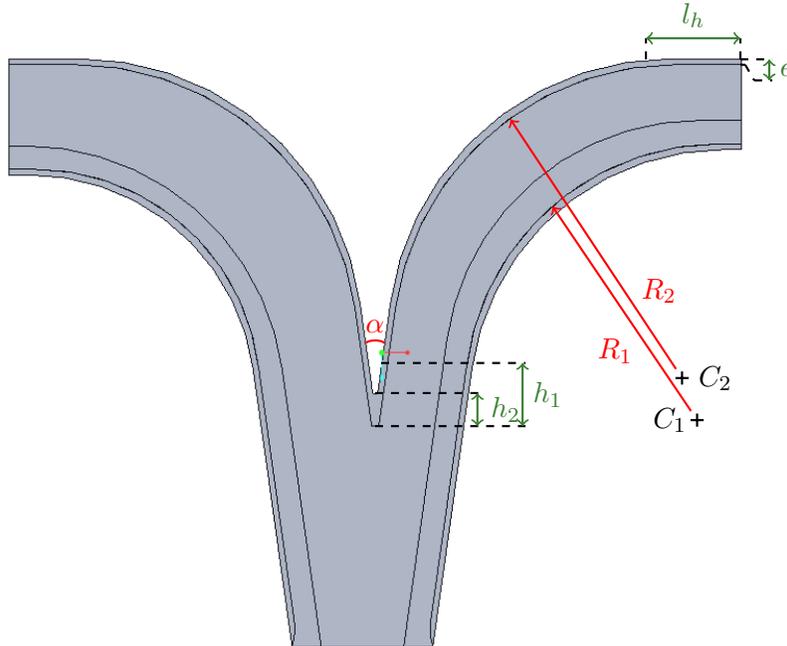


FIGURE 4.4 – Schéma du guide

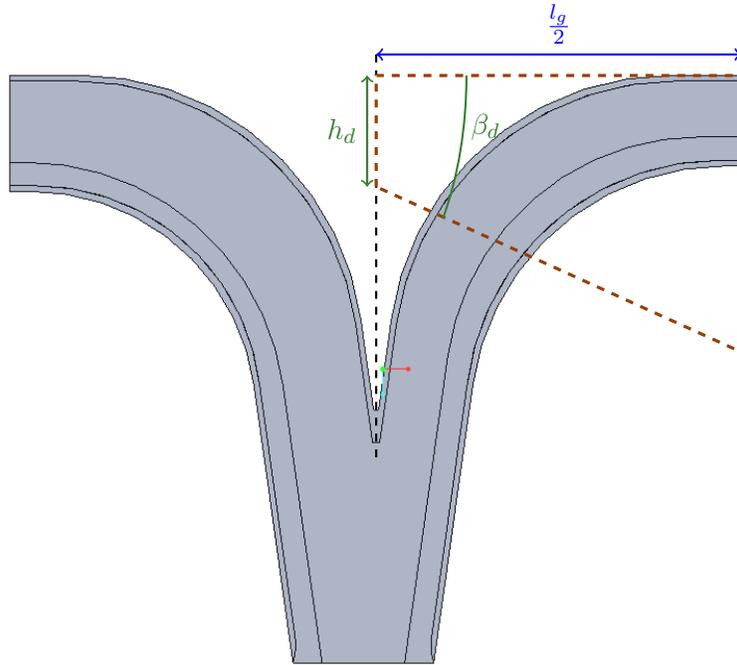


FIGURE 4.5 – Schéma découpe du guide

4.3 Contraintes

Les contraintes à respecter se divisent en deux catégories : les contraintes concernant le guide et les contraintes à propos des efforts.

Afin d'étudier les contraintes au niveau du guide, nous utiliserons le schéma illustré sur la figure 4.6. Nous définissons un jeu égal à $J = 1 \text{ mm}$. Les paramètres utilisés pour les contraintes sont représentés en bleu. La longueur L_1 correspond à la partie linéaire du guide tandis que la partie L_2 correspond à la partie circulaire. Nous considérons le repère principal (x, y) dont l'abscisse coïncide avec l'extrémité de la partie linéaire et l'ordonnée est définie comme l'axe de symétrie du guide comme le montre la figure 4.6. Ce repère nous permettra de simplifier les calculs.

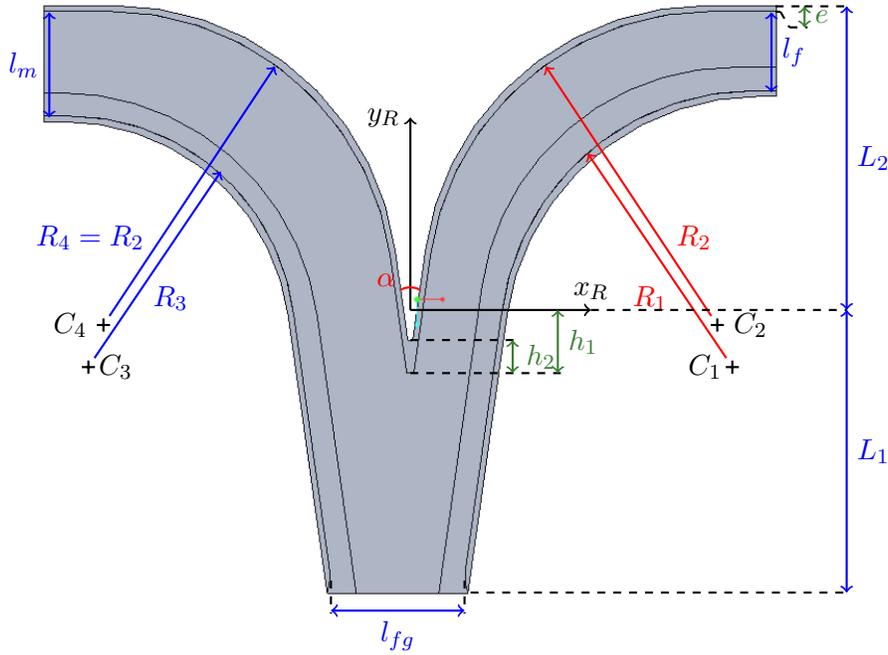


FIGURE 4.6 – Schéma du guide et contraintes étudiées

4.3.1 Logement maillons emboîtés

Nous devons respecter la contrainte suivante afin que les maillons mâles et femelles, une fois assemblés, puissent sortir du guide :

$$l_{fg} = h_{mf} + h_{mm} + J \quad (4.2)$$

Ces variables sont définies aux figures 4.2, 4.3 et 4.6.

4.3.2 Logement maillons

Les maillons mâles et femelles doivent pouvoir s'insérer dans le guide dans leurs logements respectifs l_m et l_f . Les contraintes pour le logement des maillons sont :

$$l_f = h_{mf} + J \quad (4.3)$$

$$l_m = h_{mm} + h_c + J \quad (4.4)$$

Ces variables sont définies aux figures 4.2, 4.3 et 4.6.

4.3.3 Collision entre les maillons femelles et le guide

Nous notons (x_{C1}, y_{C1}) et (x_{C2}, y_{C2}) les coordonnées respectives des points C_1 et C_2 . Les points des centres correspondant à l'extérieur des bordures du guide sont notés B_1 et B_2 ,

leurs coordonnées respectives sont notées (x_{B1}, y_{B1}) et (x_{B2}, y_{B2}) , comme le montre la figure 4.7. Afin de déterminer ces coordonnées, nous considérons les deux repères suivants : $R_1 = (O_{R1}, x_{R1}, y_{R1})$ et $R_2 = (O_{R2}, x_{R2}, y_{R2})$. Nous représentons également sur cette figure le repère principal R pour faciliter la compréhension.

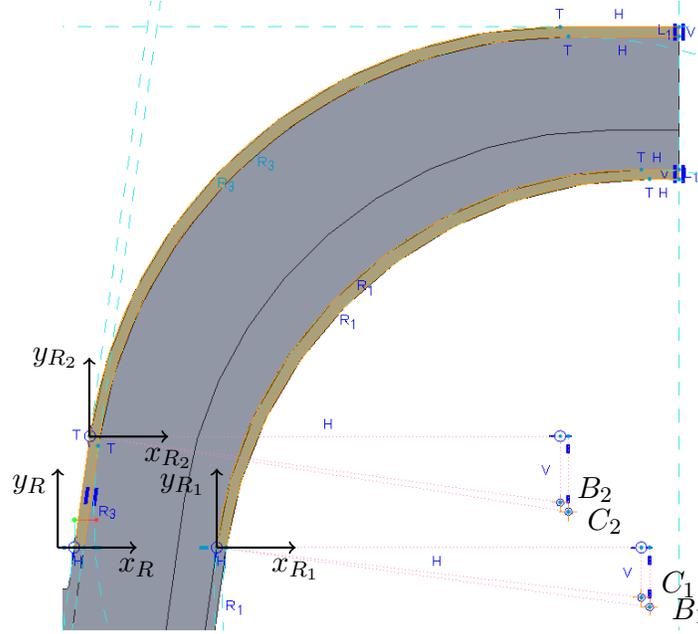


FIGURE 4.7 – Schéma du guide et paramétrisation des bordures

Afin que les maillons femelles et le guide n'entrent pas en collision, cela se traduit par la relation suivante :

$$d(C_1, C_2) \geq h_{mf} + J \quad (4.5)$$

$$\sqrt{(x_{C2} - x_{C1})^2 + (y_{C2} - y_{C1})^2} \geq h_{mf} + J \quad (4.6)$$

Afin de déterminer cette distance, nous allons étudier la géométrie du guide pour exprimer les coordonnées de chacun de ces centres dans le repère (x, y) défini précédemment.

Détermination des coordonnées du point B_1 dans le repère R_1

L'objectif est de déterminer les coordonnées de ces différents points dans le repère R . Dans un premier temps, nous travaillerons dans le repère intermédiaire R_1 défini sur la figure 4.7. Avant de déterminer les coordonnées du point C_1 , nous devons d'abord nous intéresser aux coordonnées cartésiennes (x_{B1}, y_{B1}) du point B_1 dans le repère R_1 représentées sur la figure 4.8.

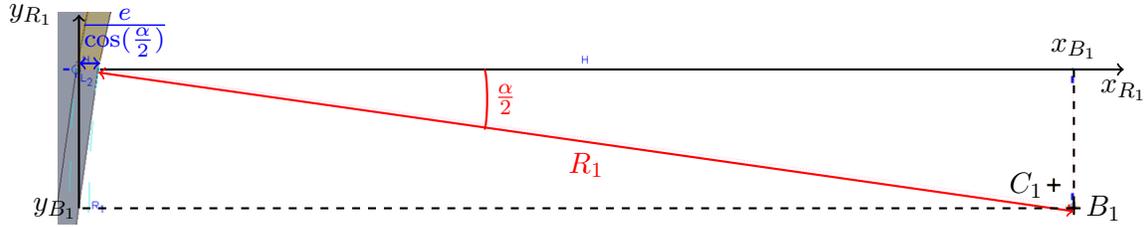


FIGURE 4.8 – Schéma du guide et paramétrisation du point B_1

Nous obtenons alors :

$$(x_{B_1})_{R_1} = R_1 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (4.7)$$

$$(y_{B_1})_{R_1} = -R_1 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (4.8)$$

Détermination des coordonnées du point C_1 dans le repère R_1

Examinons la coordonnée cartésienne y_{C_1} du point C_1 dans le repère R_1 représenté sur la figure 4.9.

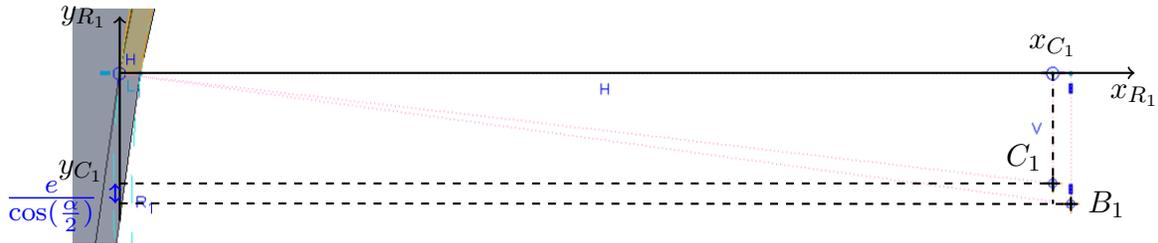


FIGURE 4.9 – Schéma du guide et paramétrisation du point C_1

Nous obtenons alors :

$$(y_{C_1})_{R_1} = -R_1 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (4.9)$$

En appliquant le théorème de Pythagore, nous avons :

$$(x_{C_1})_{R_1} = \sqrt{R_1^2 - \left(R_1 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2} \quad (4.10)$$

Détermination des coordonnées du point B_2 dans le repère R_2

Avant de déterminer les coordonnées du point C_2 , nous devons d'abord nous intéresser au point B_2 dans le repère R_2 illustré à la figure 4.10.

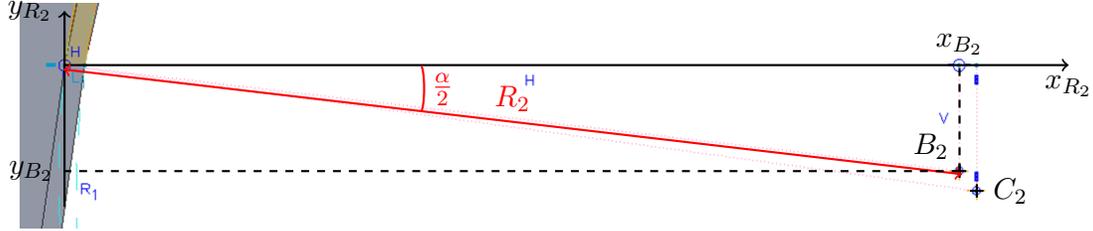


FIGURE 4.10 – Schéma du guide et paramétrisation du point B_2

Nous avons :

$$(x_{B_2})_{R_2} = R_2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (4.11)$$

$$(y_{B_2})_{R_2} = -R_2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (4.12)$$

Détermination des coordonnées du point C_2 dans le repère R_2

Examinons maintenant les coordonnées cartésiennes (x_{C_2}, y_{C_2}) du point C_2 dans le repère R_2 représenté sur la figure 4.11.

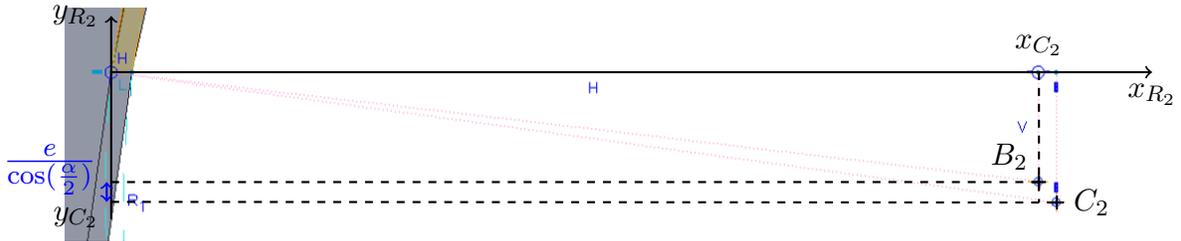


FIGURE 4.11 – Schéma du guide et paramétrisation du point C_2

Nous obtenons alors les coordonnées suivantes :

$$(y_{C_2})_{R_2} = -\left(R_2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) \quad (4.13)$$

En appliquant le théorème de Pythagore, nous avons :

$$(x_{C_2})_{R_2} = \sqrt{\left(R_2 + \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2 - \left(R_2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2} \quad (4.14)$$

Changement de repère R_1 vers R

Désormais, nous souhaitons exprimer les coordonnées des points C_1 et C_2 dans le repère principal R . Nous nous intéressons d'abord au passage du repère R_1 au repère principal R . Pour cela, on définit d'abord la variable intermédiaire v_{i1} représentée à la figure 4.12, telle que :

$$v_{i1} = (h_1 - h_2) \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (4.15)$$

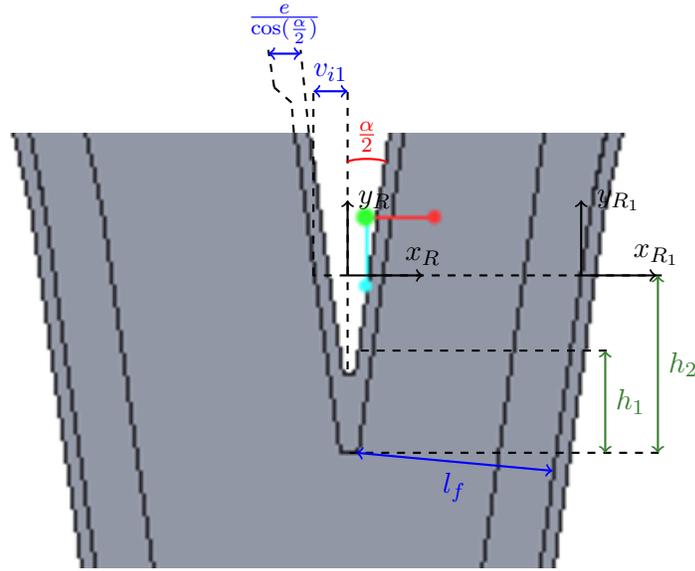


FIGURE 4.12 – Schéma du guide et variable intermédiaire v_{i1}

Nous obtenons alors :

$$(x)_R = (x)_{R_1} + v_{i1} + \frac{l_f}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (4.16)$$

$$(y)_R = (y)_{R_1} \quad (4.17)$$

Détermination des coordonnées du point C_1 dans le repère R

En conclusion nous obtenons :

$$(x_{C_1})_R = \sqrt{R_1^2 - \left(R_1 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2} + (h_1 - h_2) \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{e + l_f}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (4.18)$$

$$(y_{C_1})_R = -R_1 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (4.19)$$

Détermination des coordonnées du point B_1 dans le repère R

Nous pouvons écrire :

$$(x_{B_1})_R = R_1 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + (h_1 - h_2) \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{2e + l_f}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (4.20)$$

$$(y_{B_1})_R = -R_1 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (4.21)$$

Changement de repère R_2 vers R

Puis nous nous intéressons d'abord au passage du repère R_2 au repère principal R . Nous notons $x_{R'}$ et $y_{R'}$ le décalage entre le repère R_2 et le repère principal R selon les axes respectifs x et y . Nous pouvons alors écrire :

$$(x)_R = (x)_{R_2} + x_{R'} \quad (4.22)$$

$$(y)_R = (y)_{R_2} + y_{R'} \quad (4.23)$$

Dans un premier temps, nous allons définir la variable intermédiaire L_2 , correspondant à la longueur de la partie circulaire du guide.

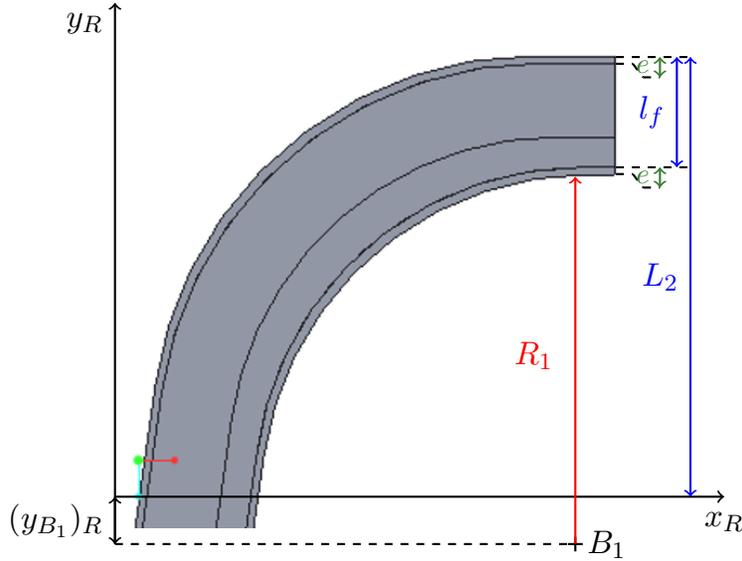


FIGURE 4.13 – Schéma du guide et variable intermédiaire L_2

La figure 4.13 permet de déterminer la relation suivante :

$$L_2 = R_1 + l_f + 2e + (y_{B_1})_{R_1} = R_1 \left(1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + l_f + 2e \quad (4.24)$$

Afin de définir $y_{R'}$, nous utilisons la figure 4.14.

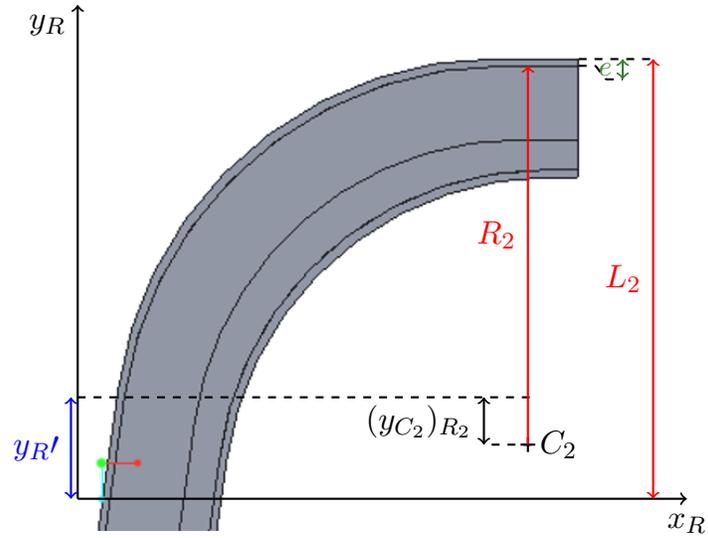


FIGURE 4.14 – Schéma du guide et variable intermédiaire $y_{R'}$

Nous pouvons alors écrire :

$$y_{R'} = L_2 - R_2 - e + (y_{C_2})_{R_2} = R_1 \left(1 - \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) - R_2 \left(1 + \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) + l_f + e + \frac{e}{\cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)} \quad (4.25)$$

Afin de définir $x_{R'}$, nous utilisons la figure 4.15.

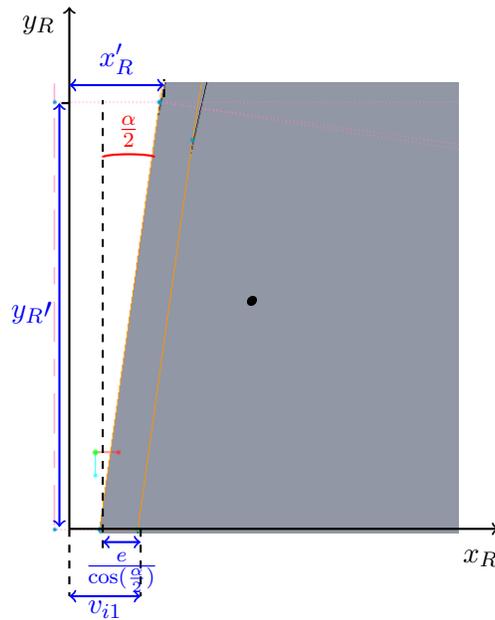


FIGURE 4.15 – Schéma du guide et variable intermédiaire $x_{R'}$

Nous avons alors :

$$x_{R'} = v_{i1} - \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + y_{R'} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = (h_1 - h_2) \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + y_{R'} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (4.26)$$

Détermination des coordonnées du point C_2 dans le repère R

Nous en déduisons que :

$$(x_{C_2})_R = \sqrt{\left(R_2 + \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2 - \left(R_2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2} + (h_1 - h_2) \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (4.27)$$

$$+ \left[R_1 \left(1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - R_2 \left(1 + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + l_f + e + \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right] \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (4.28)$$

$$(y_{C_2})_R = R_1 \left(1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - R_2 \left(2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1\right) + l_f + e \quad (4.29)$$

Détermination des coordonnées du point B_2 dans le repère R

Nous en déduisons que :

$$(x_{B_2})_R = R_2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + (h_1 - h_2) \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (4.30)$$

$$+ \left[R_1 \left(1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - R_2 \left(1 + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + l_f + e + \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right] \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (4.31)$$

$$(y_{B_2})_R = R_1 \left(1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - R_2 \left(1 + 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + l_f + e + \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (4.32)$$

Grâce aux coordonnées des points C_1 et C_2 exprimées dans le repère principal R , nous pouvons déterminer la distance entre ces derniers et calculer la contrainte $d(C_1, C_2) \geq h_{mf} + J$.

4.3.4 Collision entre les maillons mâles et le guide

Dans un second temps, nous souhaitons que les maillons mâles ne rentrent pas en collision avec le guide, cela se traduit par la relation suivante :

$$d(C_3, C_4) \geq h_{mm} + h_c + J \quad (4.33)$$

$$\sqrt{(x_{4'} - x_{3'})^2 + (y_{4'} - y_{3'})^2} \geq h_{mm} + h_c + J \quad (4.34)$$

De la même manière nous définissons deux repères R_3 et R_4 symétriques par rapport à l'axe y_R définis à la figure 4.16.

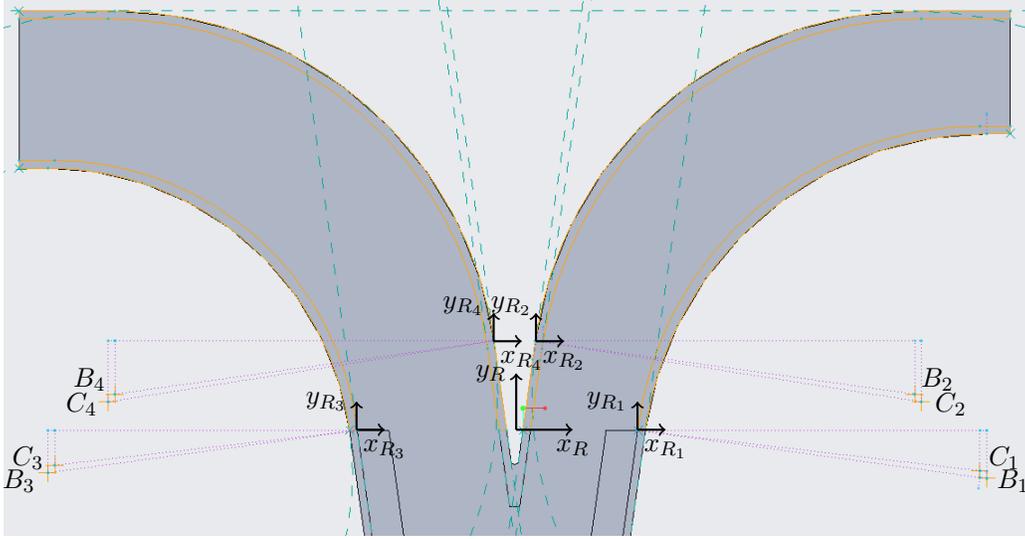


FIGURE 4.16 – Schéma du guide et paramétrisation des bordures

Nous remarquons sur la figure 4.16 que le repère R_4 est symétrique au repère R_2 par rapport à l'axe y_R . De plus, le repère R_3 est symétrique au repère R_1 par rapport à l'axe y_R .

Détermination des coordonnées du point C_4 dans le repère R_4

Examinons les coordonnées cartésiennes (x_{C_4}, y_{C_4}) du point C_4 dans le repère R_4 . Comme le repère R_4 est symétrique au repère R_2 par rapport à l'axe y_R , nous obtenons alors :

$$(x_{C_4})_{R_4} = \sqrt{\left(R_4 + \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2 - \left(R_4 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2} \quad (4.35)$$

$$(y_{C_4})_{R_4} = -\left(R_4 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) \quad (4.36)$$

De plus, d'après la géométrie du guide, nous avons : $R_4 = R_2$.

Détermination des coordonnées du point C_3 dans le repère R_3

Nous savons que le repère R_3 est symétrique au repère R_1 par rapport à l'axe y_R . Nous pouvons alors écrire :

$$(x_{C_3})_{R_3} = \sqrt{R_3^2 - \left(R_3 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2} \quad (4.37)$$

$$(y_{C_3})_{R_3} = -R_3 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (4.38)$$

Puis, nous cherchons à exprimer R_3 en fonction des autres variables.

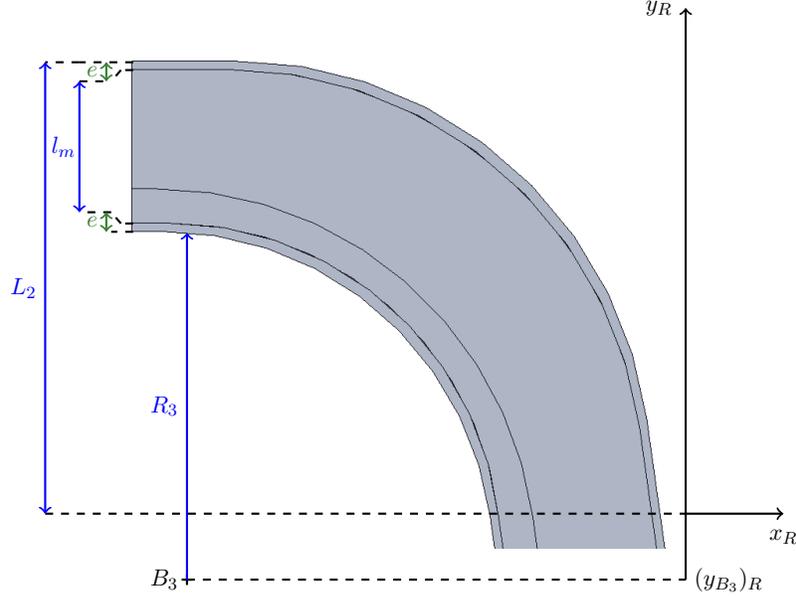


FIGURE 4.17 – Schéma du guide et variable intermédiaire R_3

La figure 4.17 nous permet de déduire la relation suivante :

$$R_3 = \frac{L_2 - l_m - 2e}{1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (4.39)$$

Changement de repère R_4 vers R

Afin de passer du repère R_4 au repère principal R , nous définissons les relations suivantes, similaires à celles déterminées précédemment :

$$(x)_R = -\left((x)_{R_4} + x_{R'}\right) \quad (4.40)$$

$$(y)_R = (y)_{R_4} + y_{R'} \quad (4.41)$$

Détermination des coordonnées du point C_4 dans le repère R

Nous pouvons alors écrire :

$$(x_{C_4})_R = -\sqrt{\left(R_4 + \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2 - \left(R_4 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2} - (h_1 - h_2) \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (4.42)$$

$$- \left[R_1 \left(1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - R_2 \left(1 + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + l_f + e + \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right] \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (4.43)$$

$$(y_{C_4})_R = R_1 \left(1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - R_2 \left(1 + 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + l_f + e \quad (4.44)$$

Changement de repère R_3 vers R

Afin de passer du repère R_3 au repère principal R , nous définissons les relations suivantes, symétriques à celles déterminées précédemment :

$$(x_{C_3})_R = - \left((x_{C_3})_{R_3} + v_{i1} + \frac{l_f}{\cos(\frac{\alpha}{2})} \right) \quad (4.45)$$

$$(y_{C_3})_R = (y_{C_3})_{R_3} \quad (4.46)$$

Détermination des coordonnées du point C_3 dans le repère R

En conclusion, nous obtenons :

$$(x_{C_3})_R = - \left[\sqrt{\left(\frac{R_1(1 - \sin(\frac{\alpha}{2})) + l_f - l_m}{1 - \sin(\frac{\alpha}{2})} \right)^2 - \left(\frac{R_1(1 - \sin(\frac{\alpha}{2})) + l_f - l_m}{1 - \sin(\frac{\alpha}{2})} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{e}{\cos(\frac{\alpha}{2})} \right)^2} \right] \quad (4.47)$$

$$+ (h_1 - h_2) \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{e}{\cos(\frac{\alpha}{2})} + \frac{l_f}{\cos(\frac{\alpha}{2})} \quad (4.48)$$

$$(y_{C_3})_R = - \left[\frac{R_1(1 - \sin(\frac{\alpha}{2})) + l_f - l_m}{1 - \sin(\frac{\alpha}{2})} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{e}{\cos(\frac{\alpha}{2})} \right] \quad (4.49)$$

4.3.5 Découpe du guide et détermination des points d'intersection

Comme montré dans le chapitre 2, il est nécessaire d'effectuer une découpe du guide. Après avoir paramétré ce dernier, nous cherchons à déterminer les nouvelles longueur et largeur du guide. Pour cela nous allons étudier l'intersection entre le cercle \mathcal{C}_1 de rayon R_1 et de centre B_1 et la droite \mathcal{D} imposée par la découpe. Nous étudierons également l'intersection du cercle \mathcal{C}_2 de rayon R_2 et de centre B_2 et la droite \mathcal{D} . Sur la figure 4.18, les cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont représentés en marron. Afin de ne pas surcharger le schéma, nous avons seulement tracé une portion de ces cercles. La droite \mathcal{D} est illustrée en orange sur la figure 4.18.

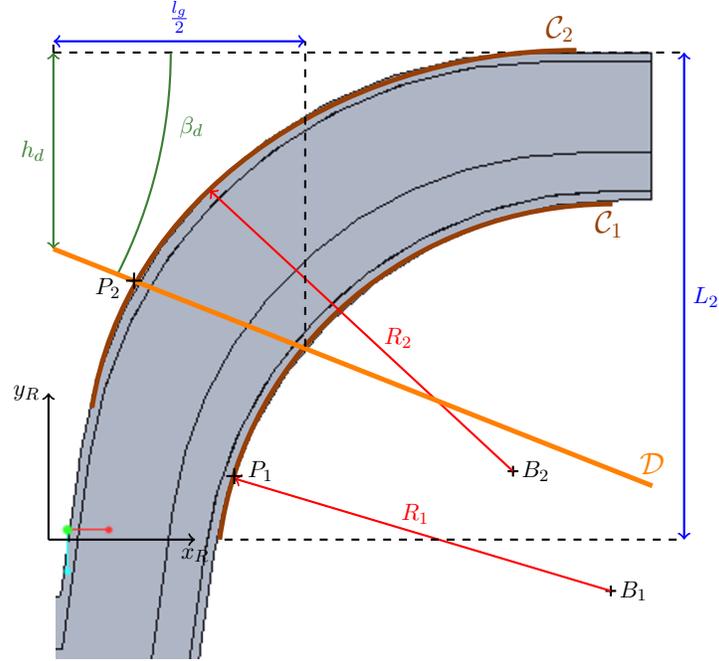


FIGURE 4.18 – Schéma découpe guide intersection

A l'aide de la figure 4.18, nous pouvons écrire l'équation de la droite \mathcal{D} :

$$y(x) = L_2 - h_d - \tan(\beta_d)x \quad (4.50)$$

Intersection du cercle \mathcal{C}_1 et de la droite \mathcal{D} : détermination de la largeur du guide

De plus, nous connaissons les coordonnées du point B_1 dans le repère R (4.20 et 4.21), centre du cercle \mathcal{C}_1 dont le rayon est R_1 . L'équation paramétrique de ce cercle est donnée ci-dessous.

$$R_1^2 = (x - (x_{B_1})_R)^2 + (y - (y_{B_1})_R)^2 \quad (4.51)$$

$$= \left(x - \left(R_1 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + (h_1 - h_2) \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{2e + l_f}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right) \right)^2 + \left(y + R_1 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right)^2 \quad (4.52)$$

L'intersection de la droite \mathcal{D} et du cercle \mathcal{C}_1 nous permet d'obtenir l'équation suivante :

$$R_1^2 = (x - A_1)^2 + (B_1 - \tan(\beta_d)x)^2, \quad (4.53)$$

où $A_1 = R_1 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{e}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + (h_1 - h_2) \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{2e + l_f}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ et $B_1 = L_2 - h_d + R_1 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Nous obtenons alors une équation du second degré :

$$x^2 \left(1 + \left(\tan(\beta_d) \right)^2 \right) + x \left(-2A_1 - 2B_1 \tan(\beta_d) \right) + A_1^2 + B_1^2 - R_1^2 = 0 \quad (4.54)$$

Le discriminant de cette équation est donné ci-dessous.

$$\Delta_1 = 4 \left(A_1 + B_1 \tan(\beta_d) \right)^2 - 4 \left(1 + \left(\tan(\beta_d) \right)^2 \right) \left(A_1^2 + B_1^2 - R_1^2 \right) \quad (4.55)$$

Or, nous savons d'après la figure 4.18 que les solutions de cette équation sont réelles, nous avons donc : $\Delta \geq 0$. De plus, nous cherchons l'intersection de ces deux entités pour la portion du cercle représentée sur cette même figure. En observant celle-ci, nous remarquons que la solution qui nous intéresse est celle dont la coordonnée selon l'axe x est la plus petite, ou encore celle dont la coordonnée selon l'axe y est positive, c'est-à-dire le point P_1 . Les coordonnées de ce point sont donc :

$$x_{P_1} = \frac{2 \left(A_1 + B_1 \tan(\beta_d) \right) - \sqrt{\Delta_1}}{2 \left(1 + \left(\tan(\beta_d) \right)^2 \right)}, \quad (4.56)$$

$$y_{P_1} = L_2 - h_d - \tan(\beta_d) \frac{2 \left(A_1 + B_1 \tan(\beta_d) \right) - \sqrt{\Delta_1}}{2 \left(1 + \left(\tan(\beta_d) \right)^2 \right)}. \quad (4.57)$$

Grâce à ces coordonnées, nous en déduisons la largeur du guide l_g :

$$\frac{l_g}{2} = y_{P_1} = L_2 - h_d - \tan(\beta_d) \frac{2 \left(A_1 + B_1 \tan(\beta_d) \right) - \sqrt{\Delta_1}}{2 \left(1 + \left(\tan(\beta_d) \right)^2 \right)} \quad (4.58)$$

Intersection du cercle \mathcal{C}_2 et de la droite \mathcal{D}

Nous cherchons désormais à déterminer l'intersection du cercle \mathcal{C}_2 et de la droite \mathcal{D} . Nous connaissons les coordonnées du point B_2 dans le repère R (4.3.3 et 4.32), centre du cercle \mathcal{C}_2 dont le rayon est R_2 .

$$(x_{B_2})_R = R_2 \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) + (h_1 - h_2) \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \quad (4.59)$$

$$+ \left[R_1 \left(1 - \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) - R_2 \left(1 + \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) + l_f + e + \frac{e}{\cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)} \right] \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \quad (4.60)$$

$$(y_{B_2})_R = R_1 \left(1 - \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) - R_2 \left(1 + 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) + l_f + e + \frac{e}{\cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)} \quad (4.61)$$

L'équation paramétrique de ce cercle est donnée ci-dessous.

$$R_2^2 = \left(x - (x_{B_2})_R\right)^2 + \left(y - (y_{B_2})_R\right)^2 \quad (4.62)$$

$$= \left[x - \left(R_2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + (h_1 - h_2) \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + (R_1(1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)) + l_f + 2e \right. \right. \quad (4.63)$$

$$\left. \left. + R_2(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1) \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) \right]^2 + \left[y - \left(R_1(1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)) - R_2(1 + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)) - e \right) \right]^2 \quad (4.64)$$

L'intersection de la droite \mathcal{D} et du cercle \mathcal{C}_2 nous permet d'obtenir l'équation suivante :

$$R_2^2 = \left(x - A_2\right)^2 + \left(B_2 - \tan(\beta_d)x\right)^2, \quad (4.65)$$

où $A_2 = R_2 \cos(\frac{\alpha}{2}) + (h_1 - h_2) \tan(\frac{\alpha}{2}) + (R_1(1 - \sin(\frac{\alpha}{2})) + l_f + 2e + R_2(\sin(\frac{\alpha}{2}) - 1)) \tan(\frac{\alpha}{2})$ et $B_2 = L_2 - h_d - R_1(1 - \sin(\frac{\alpha}{2})) + R_2(1 + \sin(\frac{\alpha}{2})) + e$.

Nous obtenons alors une équation du second degré :

$$x^2 \left(1 + \left(\tan(\beta_d)\right)^2\right) + x \left(-2A_2 - 2B_2 \tan(\beta_d)\right) + A_2^2 + B_2^2 - R_2^2 = 0 \quad (4.66)$$

Le discriminant de cette équation est donné ci-dessous.

$$\Delta_2 = 4 \left(A_2 + B_2 \tan(\beta_d)\right)^2 - 4 \left(1 + \left(\tan(\beta_d)\right)^2\right) \left(A_2^2 + B_2^2 - R_2^2\right) \quad (4.67)$$

De la même manière, nous savons que la solution qui nous intéresse est celle dont la coordonnée selon l'axe x est la plus petite, c'est-à-dire le point d'intersection P_2 . Les coordonnées de ce point sont donc :

$$x_{P_2} = \frac{2 \left(A_2 + B_2 \tan(\beta_d)\right) - \sqrt{\Delta_2}}{2 \left(1 + \left(\tan(\beta_d)\right)^2\right)}, \quad (4.68)$$

et

$$y_{P_2} = L_2 - h_d - \tan(\beta_d) \frac{2 \left(A_2 + B_2 \tan(\beta_d)\right) - \sqrt{\Delta_2}}{2 \left(1 + \left(\tan(\beta_d)\right)^2\right)}. \quad (4.69)$$

4.3.6 Longueur de la poutre déployée

Nous avons besoin de déterminer mathématiquement la longueur du guide pour calculer la longueur de la poutre déployée. Nous avons décomposé le guide en deux parties : L_1 , la partie linéaire du guide et L_2 , sa partie circulaire, comme le montre la figure 4.19.

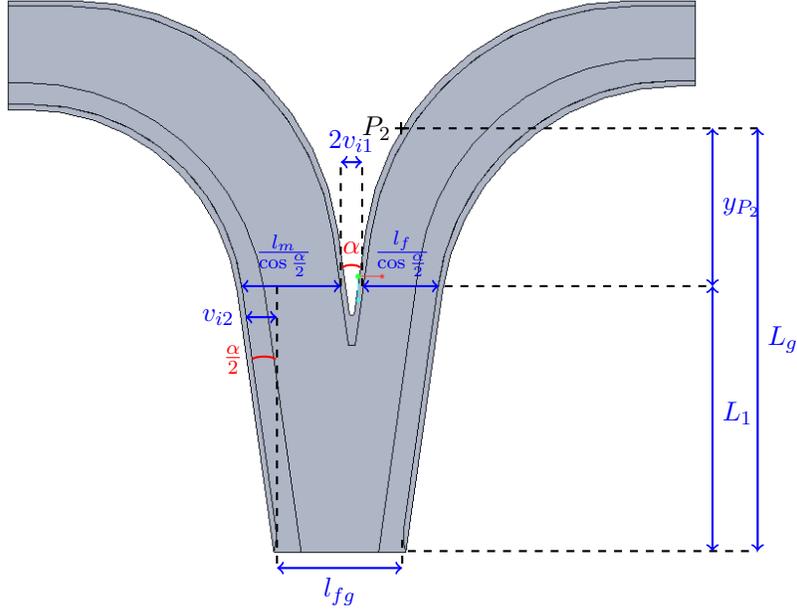


FIGURE 4.19 – Schéma du guide et longueurs associées

Nous pouvons alors écrire :

$$v_{i2} = \frac{\frac{l_m}{\cos(\frac{\alpha}{2})} + \frac{l_f}{\cos(\frac{\alpha}{2})} + 2v_{i1} - l_{fg}}{2} \quad (4.70)$$

Avec : $v_{i1} = (h_1 - h_2) \tan(\frac{\alpha}{2}) + \frac{e}{\cos(\frac{\alpha}{2})}$.

Nous avons précédemment déterminé la longueur y_{P_2} (4.69), nous en déduisons donc la relation suivante :

$$L_g = \frac{1}{2 \tan(\frac{\alpha}{2})} \left(\frac{l_m}{\cos(\frac{\alpha}{2})} + \frac{l_f}{\cos(\frac{\alpha}{2})} + 2((h_1 - h_2) \tan(\frac{\alpha}{2}) + e) - l_{fg} \right) + y_{P_2} \quad (4.71)$$

La longueur totale de la poutre déployée est donc :

$$L_p = L_{pm} + L_g + L_a \quad (4.72)$$

4.3.7 Débattement angulaire γ autour de l'axe y

Après avoir déterminé la largeur du guide, nous pouvons déterminer l'angle γ . La figure 4.20 représente le paramétrage du système.

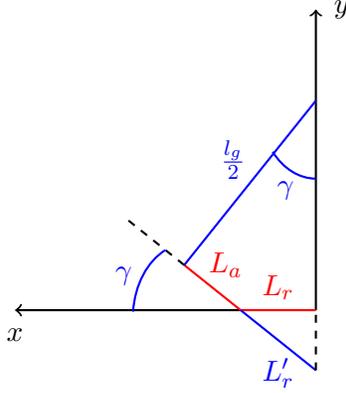


FIGURE 4.20 – Schéma simplifié du système

La projection selon l'axe x' de L_r est donnée ci-dessous :

$$L_{r'} = \frac{L_r}{\cos(\gamma)} \quad (4.73)$$

Nous avons alors :

$$\tan \gamma = \frac{L_a + L_{r'}}{\frac{l_g}{2}} \Rightarrow \frac{l_g}{2} \tan(\gamma) \cos(\gamma) - L_a \cos(\gamma) = L_r \quad (4.74)$$

Or nous savons que $\gamma \neq \pm \frac{\pi}{2}$, nous pouvons donc écrire :

$$\frac{l_g}{2} \sin(\gamma) - L_a \cos(\gamma) = L_r \quad (4.75)$$

Afin de déterminer les solutions possibles de cette équation, nous allons utiliser la substitution de la tangente des demi-angles, en effet, nous savons que :

$$\cos(\gamma) = \frac{1 - \tan(\frac{\gamma}{2})^2}{1 + \tan(\frac{\gamma}{2})^2} \quad (4.76)$$

$$\sin(\gamma) = \frac{2 \tan(\frac{\gamma}{2})}{1 + \tan(\frac{\gamma}{2})^2} \quad (4.77)$$

Afin de faciliter la lecture, nous notons : $t_\gamma = \tan(\frac{\gamma}{2})$

Nous pouvons alors écrire :

$$l_g t_\gamma - L_a + L_a t_\gamma^2 = L_r + L_r t_\gamma^2 \quad (4.78)$$

Nous obtenons l'équation du second degré suivante :

$$t_\gamma^2 (L_a - L_r) + t_\gamma l_g - (L_a + L_r) = 0 \quad (4.79)$$

Le discriminant Δ de cette équation est :

$$\Delta = l_g^2 + 4(L_a^2 - L_r^2) \quad (4.80)$$

Or nous savons d'après la modélisation du système que $L_a > L_r$, nous pouvons en déduire que le discriminant Δ est toujours positif. Nous obtenons alors les deux solutions suivantes :

$$t_{\gamma 1} = \frac{-l_g - \sqrt{l_g^2 + 4(L_a^2 - L_r^2)}}{2(L_a - L_r)} \quad (4.81)$$

$$t_{\gamma 2} = \frac{-l_g + \sqrt{l_g^2 + 4(L_a^2 - L_r^2)}}{2(L_a - L_r)} \quad (4.82)$$

Nous pouvons en déduire les deux solutions pour l'angle γ :

$$\gamma_1 = 2 \arctan \left(\frac{-l_g - \sqrt{l_g^2 + 4(L_a^2 - L_r^2)}}{2(L_a - L_r)} \right) \quad (4.83)$$

$$\gamma_2 = 2 \arctan \left(\frac{-l_g + \sqrt{l_g^2 + 4(L_a^2 - L_r^2)}}{2(L_a - L_r)} \right) \quad (4.84)$$

Afin de choisir la bonne solution, nous allons étudier la limite de ces deux fonctions lorsque $L_a \rightarrow L_r$.

Soit :

$$h_1(x) = \frac{-l_g - \sqrt{l_g^2 + 4(x^2 - L_r^2)}}{2(x - L_r)} \quad (4.85)$$

$$= \frac{-l_g - \sqrt{l_g^2 + 4(x^2 - L_r^2)}}{2(x - L_r)} \frac{-l_g + \sqrt{l_g^2 + 4(x^2 - L_r^2)}}{-l_g + \sqrt{l_g^2 + 4(x^2 - L_r^2)}} \quad (4.86)$$

$$= \frac{-2(x + L_r)}{-l_g + \sqrt{l_g^2 + 4(x^2 - L_r^2)}} \quad (4.87)$$

Nous notons : $h_1(x) = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$

Nous étudions les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow L_r} f_1(x) = -4L_r \quad (4.88)$$

$$\lim_{x \rightarrow L_r} g_1(x) = -l_g + \sqrt{l_g^2} = 0 \quad (4.89)$$

Nous en déduisons que :

$$\lim_{x \rightarrow L_r} h_1(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow L_r} \gamma_1(x) = -\pi \quad (4.90)$$

Or cette limite est impossible d'après la configuration du mécanisme. Désormais, nous allons étudier la limite de la deuxième solution.

Soit :

$$h_2(x) = \frac{-l_g + \sqrt{l_g^2 + 4(x^2 - L_r^2)}}{2(x - L_r)} \quad (4.91)$$

$$= \frac{-l_g + \sqrt{l_g^2 + 4(x^2 - L_r^2)}}{2(x - L_r)} \frac{-l_g + \sqrt{l_g^2 + 4(x^2 - L_r^2)}}{-l_g + \sqrt{l_g^2 + 4(x^2 - L_r^2)}} \quad (4.92)$$

$$= \frac{2(x + L_r)}{-l_g + \sqrt{l_g^2 + 4(x^2 - L_r^2)}} \quad (4.93)$$

Nous notons : $h_2(x) = \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$

Nous étudions les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow L_r} f_2(x) = 4L_r \quad (4.94)$$

$$\lim_{x \rightarrow L_r} g_2(x) = l_g + \sqrt{l_g^2} = 2l_g \quad (4.95)$$

Nous en déduisons que :

$$\lim_{x \rightarrow L_r} h_2(x) = \frac{2L_r}{l_g} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow L_r} \gamma_2(x) = 2 \arctan\left(\frac{2L_r}{l_g}\right) \quad (4.96)$$

Cette limite est possible contrairement à la première solution. En conclusion, le débattement angulaire γ est donné par :

$$\gamma = 2 \arctan\left(\frac{-l_g + \sqrt{l_g^2 + 4(L_a^2 - L_r^2)}}{2(L_a - L_r)}\right) \quad (4.97)$$

4.3.8 Contraintes efforts

Pour s'assurer que la poutre supportera la charge utile, nous devons vérifier qu'elle supporte le flambage de la poutre non soumise à son poids ainsi que les contraintes de compression et de flexion.

Flambage de la poutre non soumise à son poids

D'après le chapitre 1, nous savons que :

$$F_c = \frac{P_u}{\tan(\theta)} \quad (4.98)$$

En connaissant les variables à optimiser et les données fixées des maillons et de la poutre, nous pouvons exprimer l'angle d'inclinaison θ :

$$\theta = \arctan\left(\frac{h_p - (h_{mf} + h_{mm})}{2L_p}\right) \quad (4.99)$$

De plus, nous connaissons la force critique d'Euler :

$$F_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{L_p^2} \quad (4.100)$$

Nous devons également respecter la contrainte suivante, établie au chapitre 1 :

$$F_c \leq F_{CR} \Rightarrow \frac{P_u}{\tan(\theta)} \leq \frac{\pi^2 EI}{L_p^2} \quad (4.101)$$

Compression et flexion

Afin que la poutre soit toujours en compression, nous devons respecter la contrainte suivante, établie au chapitre 1 :

$$\sigma_{fmax} + \sigma_c < 0 \quad (4.102)$$

Soit :

$$\frac{h_{mf} + h_{mm}}{2I_{Gz}} L_p \left(\frac{qL_p}{2} + P_u - F_t \sin(\theta) \right) - \frac{F_t \cos(\theta)}{S} < 0, \quad (4.103)$$

où $F_t = \frac{P_u}{\sin(\theta)}$, d'après (1.26).

En connaissant les variables à optimiser et les données fixées des maillons, nous pouvons exprimer l'aire S et le moment quadratique I_{Gz} de la section de la poutre :

$$S = l_m(h_{mf} + h_{mm}) - (l_m - 2l_{em})(h_{mf} + h_{mm} - 2h_{em}) \quad (4.104)$$

$$I_{Gz} = \frac{l_m(h_{mf} + h_{mm})^3 - (l_m - 2l_{em})(h_{mf} + h_{mm} - 2h_{em})^3}{12} \quad (4.105)$$

Estimation de la charge linéique q

Afin d'étudier les contraintes de compression et de flexion, nous devons estimer la charge linéique transversale q . Afin de simplifier le problème, nous supposons que la masse du guide est négligeable. Nous nous intéresserons donc uniquement à la masse de la poutre déployée de

longueur L_p (4.72) déterminé et de section S (4.104). Nous obtenons alors la charge linéique suivante :

$$q = \rho_{PLA}S, \quad (4.106)$$

où ρ_{PLA} , la masse volumique du PLA¹, est égale à 1290×10^{-9} kg/mm³ (19).

4.4 Problème d'optimisation

Après avoir défini la fonction et les variables à optimiser ainsi que celles qui sont fixées, et après avoir caractérisé les contraintes à respecter, nous allons résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\text{minimiser } -V_w = \text{minimiser} \left(-\frac{1}{3}(L_p^3 - (L_p - L_{pm})^3)\beta(1 - \cos(\gamma)) \right)$$

sous contraintes eq.(4.2)

eq.(4.3)

eq.(4.4)

eq.(4.6)

eq.(4.34)

eq.(4.72)

eq.(4.101)

eq.(4.103)

pour $L_{pm}, L_a, L_r, l_m, h_{mf}, h_{mm}, \alpha, R_1$ et R_2

4.5 Implantation Matlab

Désormais, nous allons implanter ce problème d'optimisation sur *Matlab*. Nous utilisons la fonction *fmincon* présente dans *Matlab*, permettant de trouver le minimum d'une fonction multivariable contrainte. Nous employons l'algorithme *interior point*, utilisé par défaut par la fonction, permettant de traiter des problèmes à grande et moyenne échelles.

Nous devons définir des valeurs initiales pour résoudre ce problème d'optimisation. Nous choisissons les valeurs utilisées lors de la réalisation de notre premier prototype :

1. Abréviation du polymère : acide polylactique (*polylactic acid*)

TABLEAU 4.1 – Valeurs initiales des variables

Variable	Valeur
L_{pm}	800 mm
L_a	28.96 mm
L_r	37 mm
h_{mm}	18 mm
h_{mf}	27.7 mm
R_1	90 mm
R_2	100 mm
α	16°
l_m	20 mm

Il est également nécessaire de définir les bornes utilisées pour les différentes variables, nous choisissons les bornes suivantes :

TABLEAU 4.2 – Bornes utilisées pour les variables

Variable	Bornes
L_{pm}	[600, 1000] mm
L_a	[28, 50] mm
L_r	[37, 50] mm
h_{mm}	[15, 30] mm
h_{mf}	[15, 40] mm
R_1	[80, 100] mm
R_2	[90, 110] mm
α	[14,5, 20]°
l_m	[15, 40] mm

4.6 Résultats finaux et vérification

Nous optimisons ces variables pour différentes valeurs de h_p : 750, 570 et 1000 mm. Après avoir exécuté l'algorithme, nous procédons à une vérification en utilisant comme vecteur initial les résultats obtenus lors de la première simulation. Nous constatons que les valeurs déterminées par l'algorithme lors de la première et deuxième optimisations sont très proches l'une de l'autre.

Voici les différentes valeurs du volume de travail V_w selon les trois valeurs de h_p :

TABLEAU 4.3 – Volume de travail V_w en fonction de la distance entre les câbles h_p

Volume de travail V_w (m ³)	Distance entre les câbles h_p (mm)
2,124	750
2,122	875
2,094	1000

Nous sélectionnons alors le volume de travail le plus grand et nous obtenons les résultats suivants pour $h_p = 750$ mm :

TABLEAU 4.4 – Résultats des variables pour $h_p = 750$ mm

Variable	Résultat
L_{pm}	1000 mm
L_a	44,47 mm
L_r	45,34 mm
h_{mm}	15,00 mm
h_{mf}	40,00 mm
R_1	110,00 mm
R_2	85,19 mm
α	14,56°
l_m	21,18 mm

Dans cette partie, nous avons donc optimisé les paramètres du guide convergent et des chaînes afin de maximiser le volume de travail du robot. Désormais, notre objectif consiste à concevoir le réservoir du robot et de tester l'enroulement des chaînes dans ce dernier ainsi que sa résistance au flambage.

Chapitre 5

Conception du réservoir

Dans ce chapitre, nous allons étudier le réservoir accueillant les chaînes ainsi que la liaison entre le réservoir et le guide autorisant les deux rotations possibles. Puis, nous nous intéresserons à l'enroulement des chaînes dans ce réservoir après avoir réalisé le prototype. Enfin, nous testerons la résistance au flambage de notre système et déterminerons le rapport du volume de travail du robot sur le volume rétracté du système.

5.1 Conception du premier réservoir

Afin de limiter l'espace occupé, nous souhaitons concevoir un réservoir dans lequel viendraient s'enrouler les deux chaînes, comme le montre la figure 5.1. Les lignes en rouge représentent la trajectoire des chaînes lors de l'enroulement.

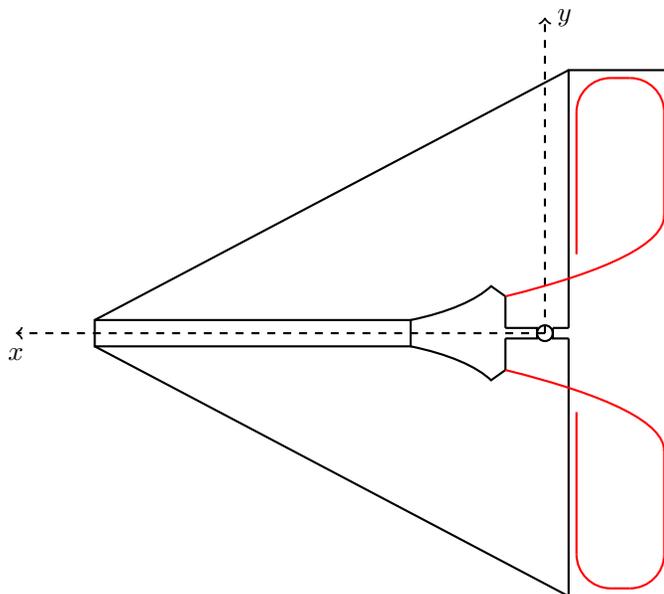


FIGURE 5.1 – Schéma du réservoir

La poutre peut tourner selon les axes y et z par rapport au réservoir grâce à une liaison joint de cardan. De plus, la forme des maillons impose aux chaînes des sens d'enroulement opposés.

5.1.1 Modélisation CAO sans orientation

Dans un premier temps, nous allons modéliser le système lorsque le guide est dans sont orientation de référence par rapport au bâti. Cette première modélisation correspond au cas le plus simple. Nous avons donc modélisé un premier réservoir comprenant un guidage dans lequel passent les chaînes. Ce guidage a été conçu de la même manière que le premier guidage du convergent, nous avons choisi une forme de spirale pour limiter le volume du réservoir et fait en sorte que les maillons n'entrent pas en collision avec le réservoir. Puis, nous avons intégré la liaison cardan entre le bâti ou réservoir et le guide convergent. Nous remarquons sur la figure 5.2 que le guidage des chaînes du guide convergent jusqu'au réservoir est possible dans cette orientation de référence. En effet, les chaînes suivent une trajectoire régulière permettant leur enroulement. Cependant, cette modélisation est simpliste et il est nécessaire d'étudier le système dans une orientation différente.

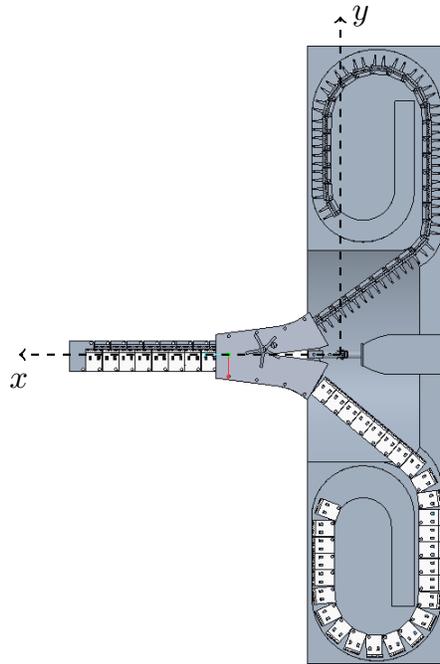


FIGURE 5.2 – Schéma du réservoir sans orientation

5.1.2 Modélisation CAO avec orientation

Après avoir étudié le guidage des chaînes jusqu'au réservoir sans orientation du guide, il est essentiel d'étudier la même problématique avec une orientation donnée. Afin d'étudier un cas plus général, nous choisissons d'orienter le guide grâce au joint de cardan avec un angle de 35° selon l'axe y et un angle égal à 45° selon l'axe z comme le montre la figure 5.3.

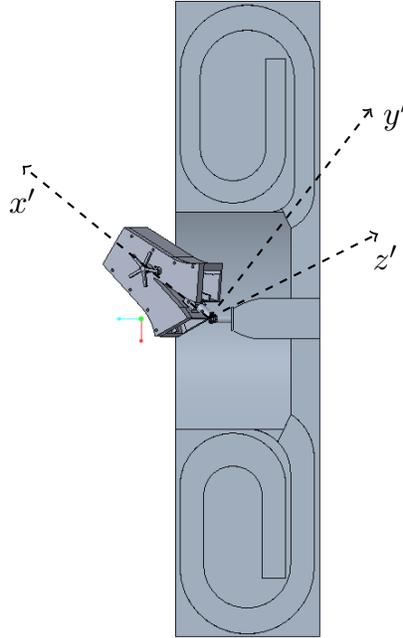


FIGURE 5.3 – Schéma du réservoir avec orientation

La première difficulté rencontrée est la modélisation de la liaison "guidage" des maillons entre le convergent et le réservoir. En effet, dans la sous-section précédente, nous avons implanté une liaison "rainure" afin qu'un point situé à l'extrémité de chaque maillon suive la courbe de guidage présente dans le réservoir. Or, dans la première modélisation, cette courbe se trouvait dans le même plan que le guide et le réservoir, ce qui n'est pas le cas ici. Ainsi, il perdure un blocage lors de l'avancée des chaînes.

5.1.3 Problèmes rencontrés

Nous avons étudié deux modélisations concernant le guidage des chaînes du convergent vers le réservoir, l'une dans l'orientation de référence et l'autre dans une orientation arbitraire. Nous remarquons également que cette dernière configuration s'avère très complexe pour le guidage des chaînes, nous avons donc pensé à utiliser une sorte de guide flexible faisant la liaison entre le réservoir et le convergent. L'un des problèmes majeurs de cette solution est la nécessité que chaque maillon s'insère dans le guidage du réservoir avec la bonne orientation, ce qui s'avère particulièrement compliqué lors du changement d'orientation du robot. De plus, cette particularité est complexe à modéliser à cause de la multitude de liaisons entre les maillons. Il est donc nécessaire de modifier le réservoir et les chaînes afin que le guide et le réservoir soient toujours dans la même orientation. Ainsi, nous pouvons limiter les difficultés rencontrées lors du guidage des chaînes.

5.2 Conception du prototype

La section précédente a permis de mettre en lumière la nécessité de modifier le réservoir et les chaînes afin que le convergent et le réservoir soient toujours dans le même plan pour faciliter le guidage. Nous allons désormais concevoir le prototype de l'actionneur prismatique rétractable. Dans un premier temps, nous modifierons les liaisons entre les maillons afin d'adapter les chaînes, puis nous concevrons un autre réservoir. Dans le chapitre 4, nous avons optimisé les paramètres du robot afin de maximiser le volume de travail. Or, cette conception était basée sur le modèle du premier réservoir. La modification du réservoir implique le changement de l'angle γ autour de l'axe z . En effet le paramètre L_r , représenté à la figure 4.20, est désormais considéré comme étant négatif, ce qui diminue légèrement l'angle de débattement γ sans remettre en question les résultats de l'optimisation.

5.2.1 Modification des liaisons entre les maillons

Nos maillons actuels sont capables d'effectuer des rotations selon les axes x et z . Afin que le convergent et le réservoir soient toujours dans la même orientation, nous souhaitons supprimer la liaison pivot d'axe x , permettant à nos maillons de supporter la torsion. Nous cherchons une solution demandant très peu de modifications. La solution la plus simple est de modifier le croisillon actuel pour y intégrer une butée qui viendra bloquer la rotation selon l'axe x du maillon suivant. L'ancienne modélisation du croisillon est représentée sur la figure 5.4a, tandis que la nouvelle intégrant la butée est illustrée sur la figure 5.4b.

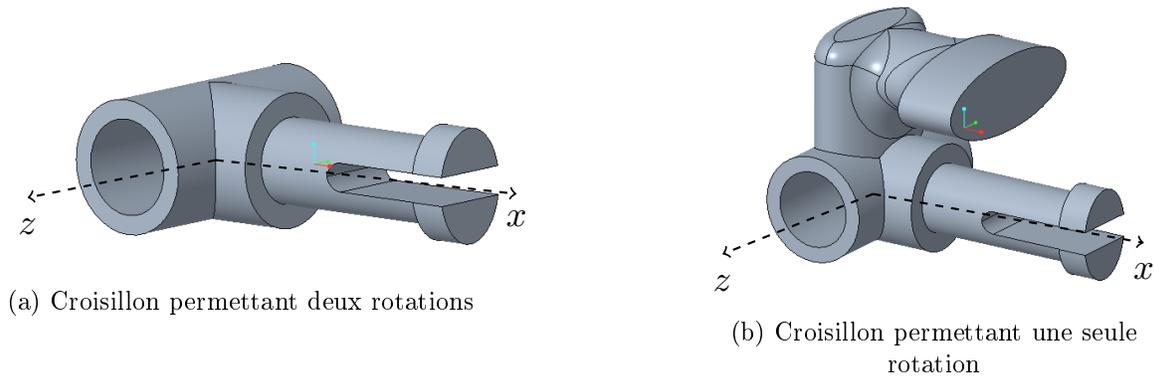


FIGURE 5.4 – Modification des liaisons entre les maillons

Nous pouvons remarquer sur la figure 5.5 que la nouvelle modélisation du croisillon permet bien de bloquer la liaison pivot d'axe x .

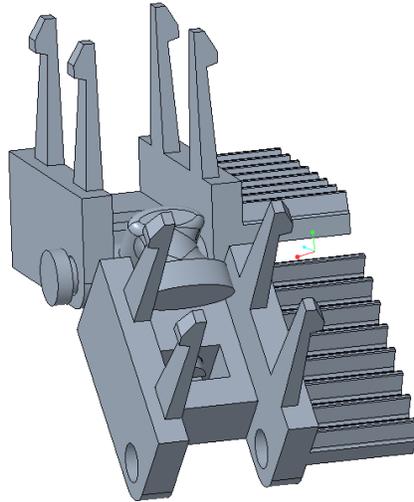


FIGURE 5.5 – Montage de deux maillons avec la nouvelle modélisation du croisillon

5.2.2 Conception du réservoir et des liaisons entre le réservoir et le guide

Après avoir modifié les liaisons entre les maillons pour autoriser une seule rotation, nous cherchons à concevoir un réservoir afin que celui-ci et le guide soient toujours dans le même plan.

Un schéma simplifié du second réservoir est représenté sur la figure 5.6 où la trajectoire des chaînes est représentée en rouge.

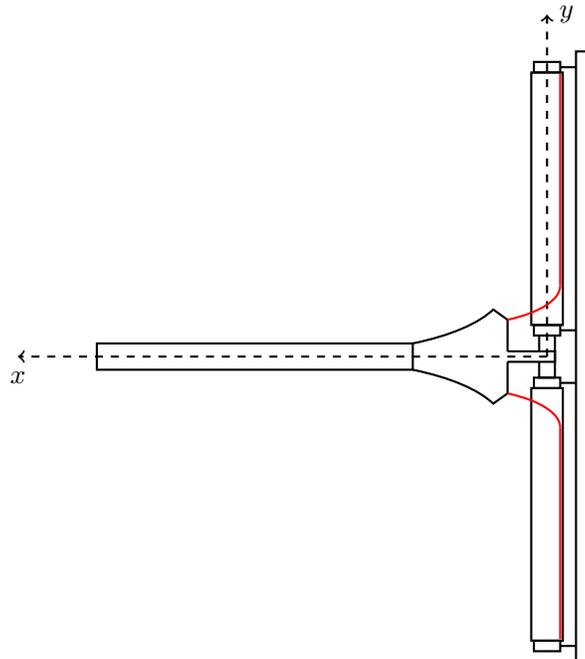


FIGURE 5.6 – Schéma simplifié du second réservoir

Ce système se compose de deux réservoirs de forme rectangulaire permettant d'accueillir respectivement la chaîne mâle, en haut, et la chaîne femelle, en bas. Afin que ces réservoirs et le guide soient toujours dans le même plan (x, y) , la solution la plus simple est de les relier par le même arbre, en l'occurrence l'axe y comme montré sur la figure 5.7. Cette liaison pivot d'axe y est assurée par quatre roulements représentés sur la figure 5.7 aux points A , B , D et E . De plus, le guide doit pouvoir tourner selon l'axe z . Nous avons donc intégré une liaison pivot d'axe z au point C entre le guide et l'arbre énoncé précédemment. Le guidage en rotation est assuré par un palier lisse monté serré dans le logement de l'arbre prévu à cet effet. Ainsi quatre roulements à billes radiaux sont nécessaires pour assurer la rotation d'axe y . Cependant, nous ajoutons deux accouplements près des roulements centraux afin de corriger un éventuel désalignement ou un problème de jeux, comme le montre la figure 5.7.

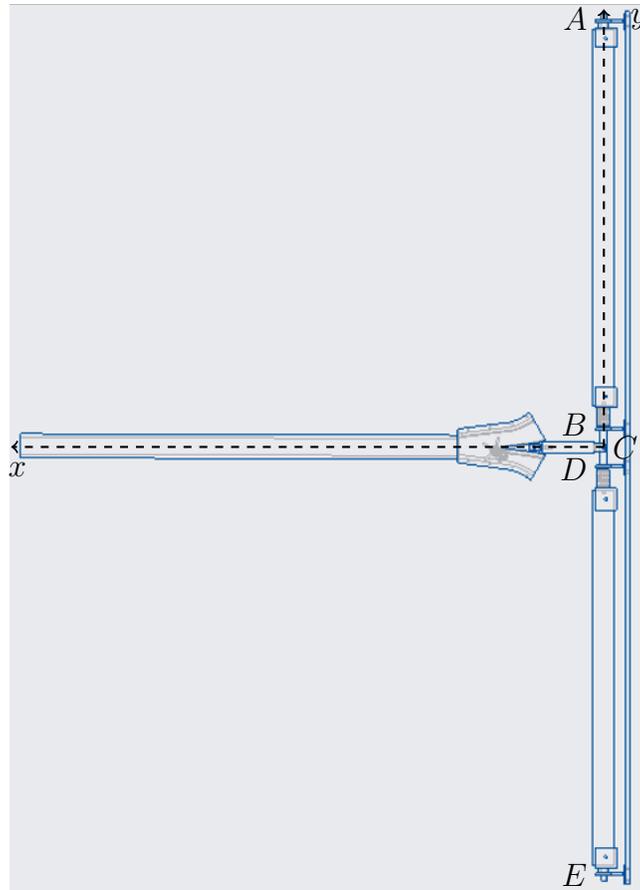


FIGURE 5.7 – Modélisation du second réservoir

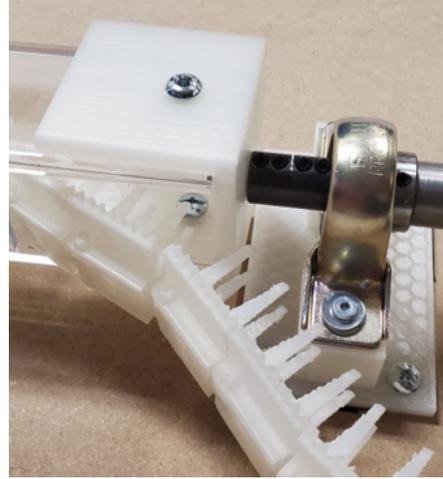
5.2.3 Enroulement des chaînes dans le réservoir

Après avoir modélisé et dimensionné le second réservoir et les liaisons entre le réservoir et le guide, nous avons réalisé le prototype de notre système. Une grande partie de ce prototype a été réalisée en impression 3D. Cependant, l'enroulement des chaînes du guide vers le réservoir est

un point essentiel de la conception. Lors de l'assemblage du prototype, nous avons pu observer des difficultés lors de cet enroulement. En effet, les maillons mâles et femelles interfèrent avec le réservoir comme nous pouvons le remarquer sur la figure 5.8.



(a) Collision entre les maillons femelles et le réservoir



(b) Collision entre les maillons mâles et le réservoir

FIGURE 5.8 – Collision entre les maillons et le réservoir

De plus, l'arrivée des maillons doit se faire de manière progressive, il ne doit pas y avoir de cassure comme dans le cas de la figure 5.9 car cela bloque la translation de la chaîne dans le réservoir.

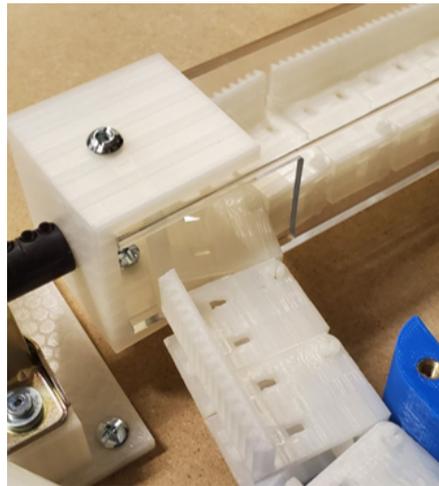


FIGURE 5.9 – Cassure lors de l'enroulement des maillons femelles dans le réservoir

Afin d'accompagner les maillons vers le réservoir, nous avons alors conçu une rampe facilement montable sur celui-ci. Cette première pièce est représentée en vert sur la figure 5.10. Elle permet d'amener les maillons progressivement dans le réservoir. La partie convexe évite l'interférence

des maillons avec le réservoir. Puis, nous avons conçu une deuxième pièce permettant d'assurer la transition de la chaîne du guide vers le réservoir. Cette pièce, représentée en bleu sur la figure 5.10, se situe à droite du réservoir. Nous avons coupé une face du réservoir afin de pouvoir observer la trajectoire des maillons. La figure 5.10 représente les maillons mâles mais deux pièces similaires ont été conçues pour les maillons femelles.

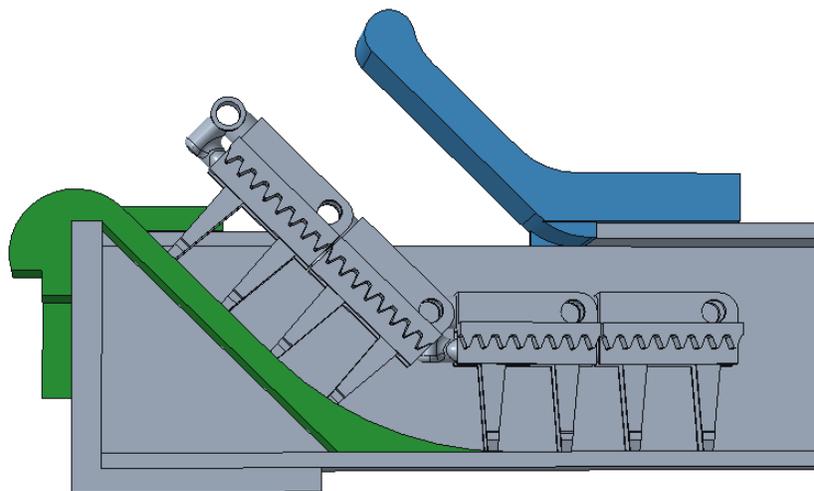


FIGURE 5.10 – Rampe permettant l'enroulement des maillons mâles jusqu'au réservoir

Ensuite, lors du montage du prototype, un autre problème est apparu. L'enroulement de la chaîne mâle vers le réservoir ne peut pas se faire car la gravité entraîne une cassure de cette chaîne, comme le montre la figure 5.11.

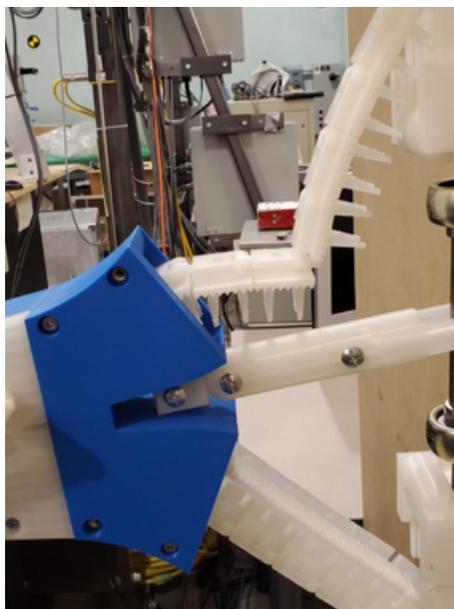


FIGURE 5.11 – Cassure au niveau des maillons mâles à la sortie du guide

Par conséquent, nous avons modélisé une pièce supplémentaire montable sur le guide permettant d'accompagner la chaîne mâle vers le réservoir. Cette pièce est représentée en bleu sur la figure 5.12.

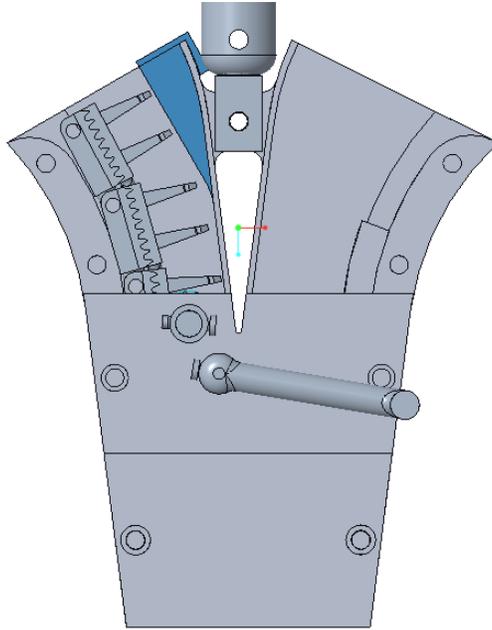


FIGURE 5.12 – Pièce montable sur le guide pour faciliter l'enroulement de la chaîne mâle dans le réservoir

5.2.4 Implantation des câbles

Après avoir résolu les problèmes concernant l'enroulement des chaînes dans le réservoir, nous allons désormais nous intéresser à l'implantation des câbles.

D'abord, afin que la poutre demeure en appui simple comme expliqué au chapitre 1, nous devons implanter une liaison sphérique pour qu'aucun moment ne soit transmis à la poutre par l'effecteur qu'elle supporte. Nous avons donc conçu une pièce intermédiaire reliant les maillons des deux chaînes à l'extrémité de la poutre, celle-ci comporte une partie de la liaison sphérique située à droite sur la figure 5.13. Puis, nous avons conçu l'extrémité de la poutre comportant la deuxième partie de la liaison et sur laquelle viendront se fixer les câbles et l'effecteur. Cette pièce est également représentée sur la figure 5.13.

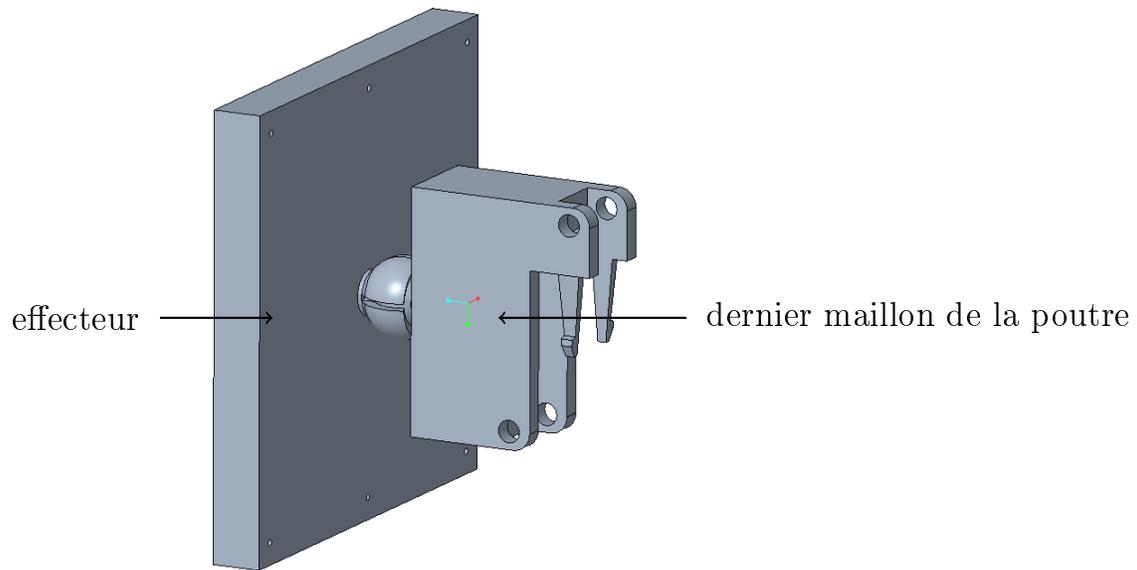


FIGURE 5.13 – Pièces situées à l’extrémité de la poutre permettant l’implantation des câbles

Afin de maintenir la poutre en compression, nous utilisons trois câbles comme dans l’article relatif à la conception d’un bras robotique sphérique (4). Nous utilisons deux câbles situés à l’extrémité supérieure et symétrique par rapport au plan (x, y) et un câble situé dans ce même plan mais à l’extrémité inférieure. Nous pouvons observer sur la figure 5.14 la poutre déployée en utilisant trois câbles en tension.



FIGURE 5.14 – Poutre déployée en utilisant quatre câbles en tension

5.3 Résultats

Après avoir conçu le second réservoir du système, corrigé les problèmes d'enroulement des chaînes dans le réservoir et implanté les câbles pour maintenir la poutre en compression, nous cherchons à évaluer le volume du système et sa résistance afin de répondre à notre problématique. Dans un premier temps, nous mesurerons le rapport du volume de travail V_w sur le volume rétracté V_r . Puis, nous évaluerons sommairement la résistance au flambage de notre système.

5.3.1 Rapport du volume de travail V_w sur le volume rétracté V_r

D'abord, nous allons déterminer le volume de travail V_w afin de pouvoir calculer le rapport de ce volume sur le volume rétracté du système V_r . La figure 5.15 détaille les paramètres mesurés pour déterminer le volume de travail V_w .

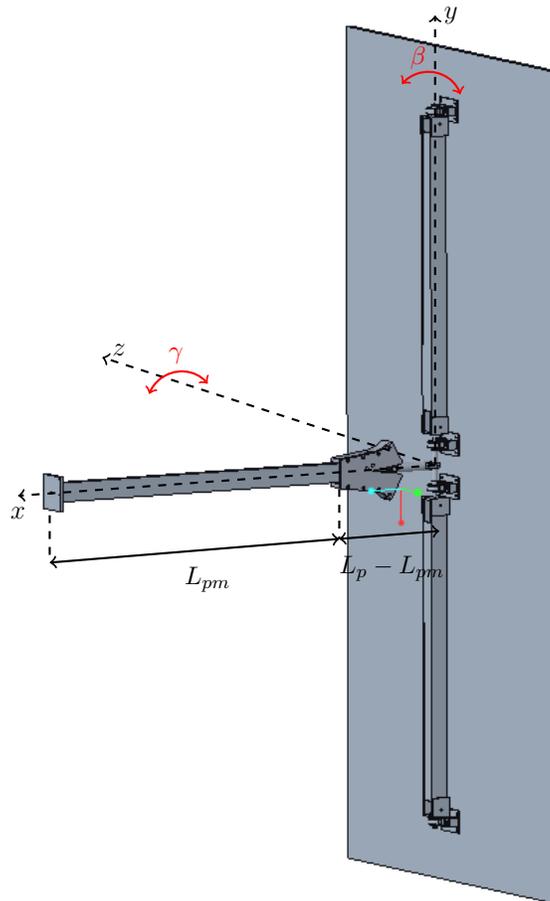


FIGURE 5.15 – Schéma des paramètres mesurés pour le calcul du volume de travail

Après avoir installé le prototype, nous obtenons les résultats suivants :

TABLEAU 5.1 – Résultats des paramètres mesurés

Paramètre mesuré	Résultat
Longueur poutre rétractée $L_p - L_{pm}$	38 cm
Longueur poutre déployée L_p	115 cm
Angle de débattement β autour de l'axe y	170°
Angle de débattement γ autour de l'axe z	100°

Nous cherchons à maximiser le volume de travail du robot déterminé au chapitre 1. Nous obtenons alors le volume de travail suivant :

$$V_w = \frac{1}{3}(L_p^3 - (L_p - L_{pm})^3)\beta(1 - \cos(\gamma)) \quad (5.1)$$

$$= 1,702 \text{ m}^3 \quad (5.2)$$

Désormais, nous allons déterminer le volume rétracté du système V_r . Pour cela, nous plaçons le robot en position "repos" c'est-à-dire lorsque $\beta = 85^\circ$ et $\gamma = 0^\circ$ comme le montre la figure 5.16.

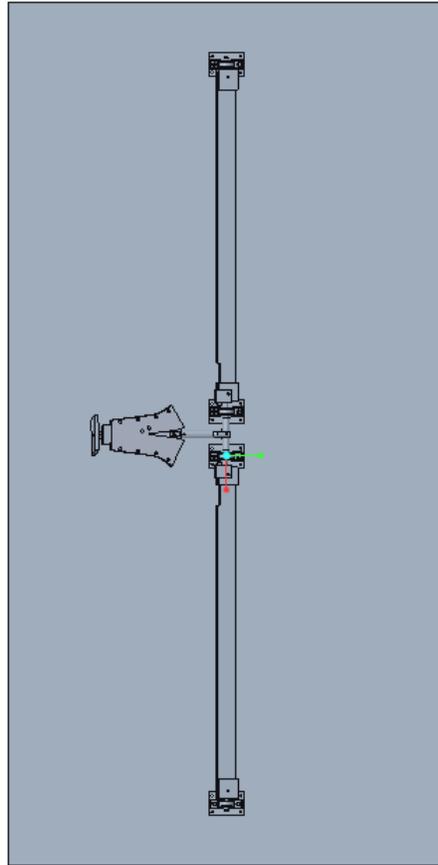


FIGURE 5.16 – Modélisation du robot en position "repos"

Afin de déterminer le volume rétracté du robot, nous choisissons de modéliser l'espace occupé par les réservoirs, les roulements, l'arbre, le guide, les chaînes, ainsi que l'extrémité de la poutre permettant l'utilisation des câbles par un parallélépipède rectangle de largeur 437,4 mm, de longueur 2104,9 mm et de profondeur 169,2 mm. Cette modélisation est représentée en bleu sur la figure 5.17.

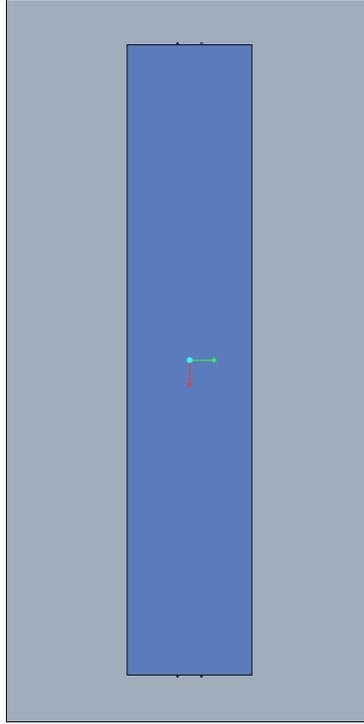


FIGURE 5.17 – Modélisation simplifiée du robot en position "repos"

Nous mesurons alors un volume rétracté égal à : $V_r = 0.147 \text{ m}^3$.

Le rapport du volume de travail V_w sur le volume rétracté du système V_r est donc :

$$r = \frac{V_w}{V_r} = 11.58 \quad (5.3)$$

5.3.2 Résistance de la poutre au flambage

Après avoir déterminé le rapport du volume de travail V_w sur le volume rétracté du système V_r , nous cherchons à tester la résistance au flambage de la poutre. Pour cela, nous déployons la poutre à sa longueur maximale et nous appliquons des efforts de tension aux câbles afin de maintenir la poutre en compression. Nous utilisons trois câbles (deux en position haute et un en position basse). Les figures 5.18 et 5.19 illustrent la poutre déployée.

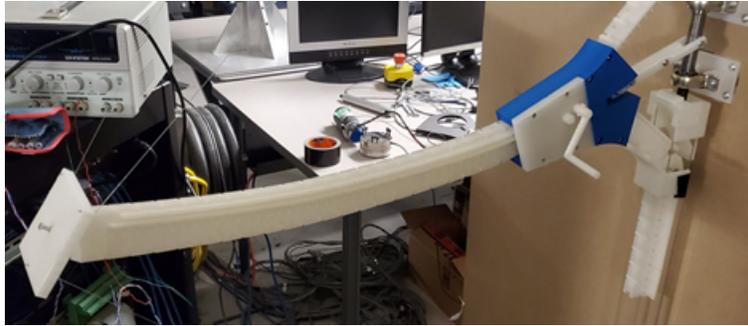


FIGURE 5.18 – Poutre déployée (vue de côté)

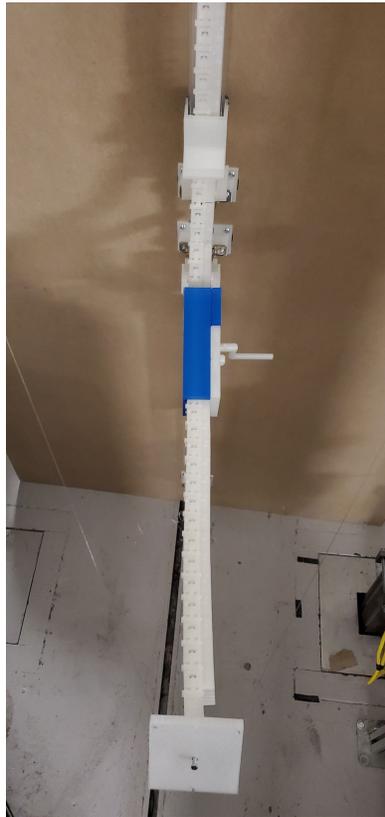


FIGURE 5.19 – Poutre déployée (vue de face)

Cependant, lorsqu'un effort trop important est appliqué à l'un des câbles, la poutre a tendance à flamber comme le montre la figure 5.20.



FIGURE 5.20 – Flambage de la poutre

5.4 Discussion

Après avoir mesuré le rapport du volume de travail V_w sur le volume rétracté V_r et la résistance de la poutre, nous cherchons à interpréter ces résultats pour répondre à notre problématique.

5.4.1 Rapport du volume de travail V_w sur le volume rétracté V_r

Dans le chapitre 4, nous avons optimisé les paramètres du robot et obtenu un volume de travail théorique de $2,124 \text{ m}^3$. Dans la section précédente, nous avons obtenu un volume de travail égal à $1,702 \text{ m}^3$.

Cette différence peut s'expliquer par le changement de modèle du robot lors de la conception de second réservoir. En effet, cette modification implique le changement de l'angle γ autour de l'axe z . Le paramètre L_r , représenté à la figure 4.20, est désormais considéré comme étant négatif, ce qui diminue légèrement l'angle de débattement γ . Cependant la valeur expérimentale obtenue est proche de la valeur théorique, ce qui répond à nos besoins.

De plus, le rapport du volume de travail V_w sur le volume du système rétracté V_r est égal à 11,58. Ce rapport est élevé, ce qui signifie que notre objectif a été atteint.

5.4.2 Résistance de la poutre au flambage

Nous remarquons que l'utilisation des câbles permet de maintenir la poutre en compression et de soutenir son extrémité. Or, lorsque nous appliquons un effort un peu plus important sur l'un des câbles, la poutre est sensible au flambage, comme le montre la figure 5.20. Cela peut s'expliquer par la présence de jeux entre les maillons que nous pouvons observer sur la figure 5.21. Nous pourrions également augmenter la largeur des maillons ou utiliser un autre matériau pour améliorer cette résistance.

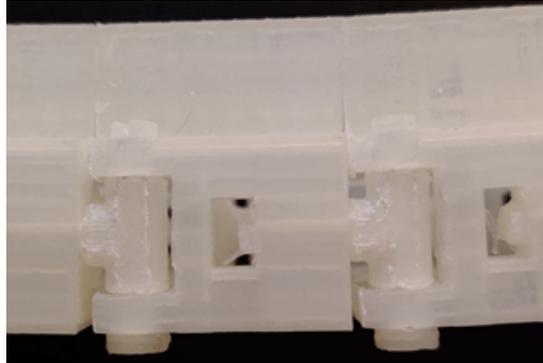


FIGURE 5.21 – Jeux entre les maillons causant le flambage de la poutre

Nous observons également sur la figure 5.22 que les jeux entre les maillons engendrent la flexion de la poutre. Cependant, ces jeux pourraient être corrigés en étudiant les tolérances des liaisons entre les maillons.



FIGURE 5.22 – Jeux entre les maillons causant la flexion de la poutre

Nous remarquons sur la figure 5.18 que les câbles situés à l'extrémité de la poutre permettent de redresser cette dernière, cependant le guide convergent penche légèrement vers le bas à cause de la gravité. Cela empêche la poutre d'atteindre correctement la position extrême élevée, c'est-à-dire lorsque l'angle de débattement γ autour de l'axe z est égal à $+50^\circ$. Il serait possible d'utiliser d'autres câbles pour soutenir le guide mais cela risquerait d'augmenter l'encombrement du système.

Dans ce chapitre, nous avons conçu le réservoir permettant d'accueillir les chaînes mâle et femelle après avoir réalisé la difficulté de l'enroulement de ces chaînes dans le réservoir. Nous avons donc conçu un réservoir relié à notre guide par un arbre afin que ceux-ci soient toujours dans le même plan. Puis, nous avons corrigé les problèmes d'enroulement en ajoutant deux pièces facilement montables sur les réservoirs. Ensuite, nous avons mesuré le rapport du volume de travail V_w sur le volume rétracté du robot V_r égal à 11.58 et la résistance au flambage du système. Nous concluons que ce rapport est élevé et permet d'atteindre notre objectif principal tandis que la résistance au flambage pourrait être améliorée.

Conclusion

L'objectif de ce mémoire consiste à concevoir un actionneur prismatique rétractable résistant au flambage et supportant la compression, permettant de maximiser le ratio entre le volume de travail utile et le volume replié du manipulateur dont il forme la colonne vertébrale.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté le système dans son ensemble dont l'élément principal est une poutre rétractable composée de deux chaînes. Ces chaînes, composées chacune de plusieurs maillons, s'imbriquent l'une dans l'autre pour former une poutre rigide. Le système comprend donc une poutre rétractable, un effecteur situé à l'extrémité de cette poutre et un réservoir accueillant les chaînes. Un joint de cardan relie la poutre et le réservoir et permet de libérer les rotations selon les axes y et z . Trois câbles relient le réservoir et l'extrémité de la poutre et permettent d'actionner ces rotations. Nous avons également défini le volume de travail que nous souhaitons optimiser et les contraintes permettant à la poutre de ne pas flamber et de demeurer en compression.

Puis, dans le chapitre suivant, nous avons présenté les différentes sections de la poutre possibles et sélectionné la meilleure en considérant les contraintes propres au flambage et à l'assemblage des chaînes. Ensuite, nous avons conçu les liaisons entre les maillons permettant de libérer les deux degrés de rotation souhaités. Nous avons également choisi et dimensionné le système d'emboîtement des maillons : les *snap-fits*. Enfin, nous avons modélisé une ébauche du guide convergent permettant l'assemblage et le désassemblage des chaînes et effectué une découpe de celui-ci afin de maximiser le débattement angulaire.

Dans le troisième chapitre, l'objectif était de concevoir un système d'engrènement permettant de faire avancer les chaînes par rapport au guide. Dans un premier temps, nous avons sélectionné le système pignon crémaillère car celui-ci est le plus facilement adaptable à notre système. Nous avons donc intégré la crémaillère aux maillons en tenant compte de l'espace entre ceux-ci. Nous avons également utilisé un coefficient de déport afin de rendre notre engrenage plus résistant. Puis, nous avons conçu les roues dentées permettant d'engrener les crémaillères.

Ensuite, dans le quatrième chapitre, nous avons optimisé les paramètres du guide et des chaînes afin de maximiser le volume de travail défini dans le chapitre 1. Pour cela, nous avons défini les

variables de la poutre, des maillons et du guide. Nous avons également déterminé les différentes contraintes à prendre en considération, comme la collision entre les maillons et le guide, la résistance au flambage de la poutre ou encore la largeur du guide permettant d'accueillir les maillons. Nous avons implanté ces variables et ces contraintes dans *Matlab* pour sélectionner les paramètres qui permettent d'obtenir le volume de travail maximal.

Dans le dernier chapitre, l'objectif était de concevoir le réservoir accueillant les chaînes et la liaison entre le réservoir et le guide, puis, de tester notre prototype. La première conception du réservoir présentait des difficultés lors de la modélisation CAO avec orientation. En effet, dans cette configuration le guidage des chaînes du guide convergent vers le réservoir s'avérait très complexe. Nous avons alors conçu un second réservoir afin que ce dernier et le convergent soient toujours dans la même orientation pour faciliter le guidage des chaînes. Cela a impliqué la modification des liaisons entre les maillons afin de ne conserver qu'une seule rotation (celle autour de l'axe x). Ensuite, nous avons conçu ce réservoir et dimensionné le système composé de quatre roulements et de deux accouplements. Cependant, l'enroulement des chaînes dans le réservoir restait problématique. Nous avons donc inclus deux pièces facilement montables sur le réservoir permettant aux chaînes d'arriver progressivement et de ne pas entrer en collision avec le réservoir. Enfin, nous nous sommes intéressés à l'implantation des câbles. Pour cela nous avons modélisé deux pièces assemblées à l'extrémité de la poutre et comportant une liaison sphérique afin que la poutre demeure en appui simple et que les câbles ne transmettent aucun moment à la poutre. Puis, nous avons testé notre prototype en utilisant trois câbles travaillant uniquement en tension.

Dans un premier temps, nous avons déterminé le volume de travail du prototype en mesurant différents paramètres. Nous obtenons un volume égal à $V_w = 1,702 \text{ m}^3$. Lors de l'optimisation nous avons obtenu un volume théorique égal à $2,124 \text{ m}^3$, cette différence peut s'expliquer par le changement de modèle du robot lors de la conception de second réservoir. Puis, nous avons mesuré le volume rétracté du système en position "repos" en le modélisant par un parallélépipède rectangle pour obtenir un volume égal $V_r = 0,147 \text{ m}^3$. Par conséquent, le rapport du volume de travail V_w sur le volume du système rétracté V_r est égal à 11,58. Ce rapport est élevé, ce qui signifie que notre objectif a été atteint.

Dans un second temps, nous avons déterminé la résistance au flambage de la poutre. Pour cela, nous avons déployé la poutre à sa longueur maximale et appliqué des efforts aux câbles afin de la maintenir en compression. Nous remarquons que les câbles permettent de maintenir la poutre en compression, cependant le système est sensible au flambage à cause des jeux entre les maillons. De plus, le guide convergent penche vers le bas à cause de la gravité. Il serait possible d'utiliser d'autres câbles pour soutenir le guide mais cela risquerait d'augmenter fortement l'encombrement du système.

Le système pourrait être amélioré en corrigeant les jeux entre les maillons, ce qui augmente-

rait la résistance au flambage et diminuerait la flexion de la poutre. Nous pourrions également augmenter la largeur des maillons ou utiliser un autre matériau pour améliorer cette résistance. Il serait aussi possible de modifier le design du guide pour éviter d'avoir à rajouter une pièce facilitant l'enroulement de la chaîne mâle dans le réservoir et de diminuer la longueur rétractée du robot. De plus, nous pourrions optimiser la forme du réservoir afin de diminuer la hauteur totale du robot. Ces améliorations permettraient au système d'être plus résistant et de diminuer le volume rétracté V_r .

Notre système comporte plusieurs avantages. D'abord, les câbles flexibles utilisés dans les robots parallèles entraînés par câbles sont capables de se rétracter en un petit volume, cependant, ils ne peuvent supporter la compression. La poutre rétractable supporte la compression et permet d'obtenir un volume minimal lorsque celle-ci est rétractée. En combinant ces deux éléments, nous observons lors des tests préliminaires, qu'il est possible de combiner ces avantages. Puis, ce type de manipulateur permet de minimiser l'espace lorsque le robot est rétracté. Ainsi les entreprises, particulièrement les PME, peuvent utiliser cet espace lorsque le robot n'est pas utilisé et donc, maximiser leur productivité. Ce n'est pas le cas des bras robotiques commerciaux classiques, qui, lorsqu'ils sont inutilisés, occupent un espace important, même s'il est possible de jouer sur les différentes rotations pour limiter le volume occupé. En effet, notre robot est plus mince, donc plus adapté pour les petits espaces et dispose d'un grand volume de travail. Enfin les interférences des câbles sont un problème majeur des robots parallèles entraînés par câbles. Or, notre poutre rétractable permet de placer les enrouleurs dans le même plan (contre la plaque), ce qui réduit fortement les collisions des câbles entre eux et avec l'environnement.

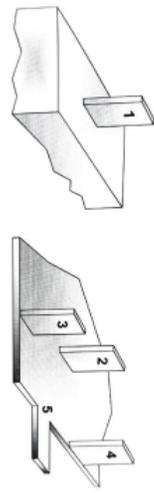
En conclusion, nous avons conçu un actionneur prismatique rétractable résistant au flambage maximisant le rapport du volume de travail V_w sur le volume rétracté du robot V_r . Cependant, il serait nécessaire de motoriser notre prototype et d'étudier l'actionnement des câbles ainsi que leurs problèmes d'interférences dans l'espace de travail du robot afin que celui-ci soit fonctionnel.

Annexe A

Dimensionnement des *snap-fits* : leviers en porte à faux

La figure A.1 nous a permis de dimensionner les leviers en porte à faux des *snap-fits*. Les figures sont tirées de (17).

Entrées		Résultats		Entrées		Résultats		Entrées		Résultats		Entrées		Résultats	
Poutre porte-à-faux section constante															
L_s	Longueur (mm)														
15,00		W_o	Largeur (mm)												
3,00		T_b	Épaisseur (mm)												
2,00		δ_{design}	Undercut (mm)												
2,00		E	Module d'Young (Mpa)												
2540,00		$\epsilon_{initial}$	Désormation initiale (%)												
2,67%		L/T	L/T ratio pour facteur Q												
7,50		Q	Facteur Q pour déformation sur le mur												
1,11		$\epsilon_{calc Q}$	Désormation ajustée par facteur Q (%)												
2,40%		$F_{p,q}$	Force maximale pour déformation (N)												
8,14		δ_{curat}	Undercut donnée par la courbe Force-Déformation (mm)												
1,48		$F_{p,final}$	Force donnée par la courbe Force-Déformation (N)												
4,80		ϵ_{final}	Déformation finale (%)												
1,78%		α_{design}	Angle d'insertion (°)												
25,00		$\Delta(\alpha, \beta)$	Changements à apporter à l'angle (deg.)												
5,63		$\alpha_{effective}$	Angle effectif (deg.)												
30,63		μ	Coef. Friction												
0,30		$F_{assemblage}$	Force d'assemblage (N)												
5,21		β_{design}	Angle de rétention (deg.)												
5,00		$\beta_{effective}$	Angle effectif (deg.)												
-0,63		$F_{separer}$	Force nécessaire à la séparation (N)												
1,38															



Facteur Q (case h5)

Beam Aspect Ratio L_p/T_b	Beam to wall configuration (See Fig.13.6)				
	1	2	3	4	5
1.5	1.60	2.12	2.40	6.50	8.00
2.0	1.35	1.70	1.90	4.60	5.50
2.5	1.22	1.45	1.65	3.50	4.00
3.0	1.17	1.35	1.45	2.82	3.15
3.5	1.15	1.28	1.38	2.4	2.65

Beam Aspect Ratio L_p/T_b	Beam to wall configuration (See Fig.13.6)				
	1	2	3	4	5
5.0	1.12	1.21	1.28	1.95	2.10
5.5	1.11	1.19	1.27	1.85	1.95
6.0	1.10	1.17	1.25	1.75	1.85
6.5	1.09	1.15	1.24	1.70	1.80
7.0	1.08	1.13	1.22	1.65	1.75
7.5	1.07	1.11	1.2	1.60	1.70
8.0	1.06	1.10	1.19	1.55	1.65
8.5	1.05	1.09	1.18	1.5	1.60
9.0	1.04	1.08	1.17	1.45	1.57
9.5	1.03	1.07	1.16	1.4	1.55
10.0	1.02	1.06	1.16	1.38	1.52
10.5	1.01	1.05	1.15	1.36	1.50
11.0	1.00	1.04	1.15	1.35	1.47

FIGURE A.1 – Dimensionnement des *snap-fits* : leviers en porte à faux

Annexe B

Conditions géométriques d'engrènement

Les grandeurs géométriques sont déterminées grâce aux relations données sur les figures B.1 et B.2.

Grandeurs	Pignon 1	Roue 2
Diamètres		
- primitif	$d_1 = z_1 m$	$d_2 = z_2 m$
- de base	$d_{b1} = z_1 m \cos\alpha$	$d_{b2} = z_2 m \cos\alpha$
- de fonctionnement	$d_1' = z_1 m \cos\alpha / \cos\alpha'$	$d_2' = z_2 m \cos\alpha / \cos\alpha'$
- de pied	$d_{f1} = m[z_1 - 2(1 + c^* - x_1)]$	$d_{f2} = m[z_2 - 2(1 + c^* - x_2)]$
- de tête	$d_{a1} = m[z_1 + 2(1 + x_1 - k)]$	$d_{a2} = m[z_2 + 2(1 + x_2 - k)]$
Entraxes		
- nominal	$a = (z_1 + z_2) / 2 \cdot m$	
- de fonctionnement	$a' = a \cos\alpha / \cos\alpha'$	
Angles de pression		
- de génération	$\alpha = \alpha_p$	
- de fonctionnement	$\alpha' = \arccos(a \cos\alpha / a')$	
- de fonctionnement	$\text{inv}\alpha' = \text{inv}\alpha + 2[(x_1 + x_2) / (z_1 + z_2)] \tan\alpha$	
- de tête	$\cos\alpha_{a1} = d_{b1} / d_{a1}$	$\cos\alpha_{a2} = d_{b2} / d_{a2}$
Hauteurs		
- de la dent	$h_1 = 0,5(d_{a1} - d_{f1})$	$h_2 = 0,5(d_{a2} - d_{f2})$
- utile	$h' = 0,5(d_{a1} + d_{a2}) - a'$	
Epaisseurs de dent		
- sur primitif	$s_1 = (\pi/2 + 2x_1 \tan\alpha)m$	$s_2 = (\pi/2 + 2x_2 \tan\alpha)m$
- de tête	$s_{a1} = d_{a1}(s_1/d_1 + \text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha_{a1})$	$s_{a2} = d_{a2}(s_2/d_2 + \text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha_{a2})$
- de base	$s_{b1} = d_{b1}(s_1/d_1 + \text{inv}\alpha)$	$s_{b2} = d_{b2}(s_2/d_2 + \text{inv}\alpha)$

FIGURE B.1 – Grandeurs géométriques des roues cylindriques droites à dentures déportées
(22)

	Droite	Hélicoïdale
Saillie	$m_0 (1 + x)$	
Creux	$m_0 (1,25 - x)$	
Hauteur	$2,25 m_0$	
Diamètre primitif de référence	$d = z m_0$	$d = z \frac{m_0}{\cos \beta}$
Diamètre de tête	$d_a = m_0 (z + 2 + 2x)$	$d_a = m_0 \left(\frac{z}{\cos \beta} + 2 + 2x \right)$
Épaisseur sur le cercle ou le cylindre primitif de référence	$s = m_0 \left(\frac{\pi}{2} + 2x \tan \alpha_0 \right)$	réelle :
		$s_n = m_0 \left(\frac{\pi}{2} + 2x \tan \alpha_0 \right)$
		apparente :
		$s_t = m_0 \left(\frac{\pi}{2 \cos \beta} + 2x \tan \alpha_{t0} \right)$
		(1) α_{t0} : angle de pression apparent de la crémaillère génératrice (voir Engrenages parallèles- Étude géométrique [8]).

FIGURE B.2 – Caractéristiques géométriques d'une denture extérieure déportée

Le déport x est considéré en valeur algébrique (10). α_w , est l'angle en fonctionnement, il permet de calculer les grandeurs en fonctionnement. Connaissant la valeur de α , nous pouvons calculer son involute. Nous savons que :

$$inv(\alpha) = \tan(\alpha) - \alpha \quad (\text{B.1})$$

Nous connaissons la valeur de l'involute de α , nous pouvons donc en déduire l'involute de α_w :

$$inv(\alpha_w) = inv(\alpha) + 2 \tan(\alpha) \frac{x_1 + x_2}{Z_1 + Z_2} \quad (\text{B.2})$$

Nous pouvons alors en déduire la valeur de α_w .

Annexe C

Dimensionnement du système

Après avoir réalisé une ébauche du réservoir représentée à la figure C.1, nous cherchons à dimensionner les roulements. Ces derniers peuvent supporter des charges axiales et radiales.

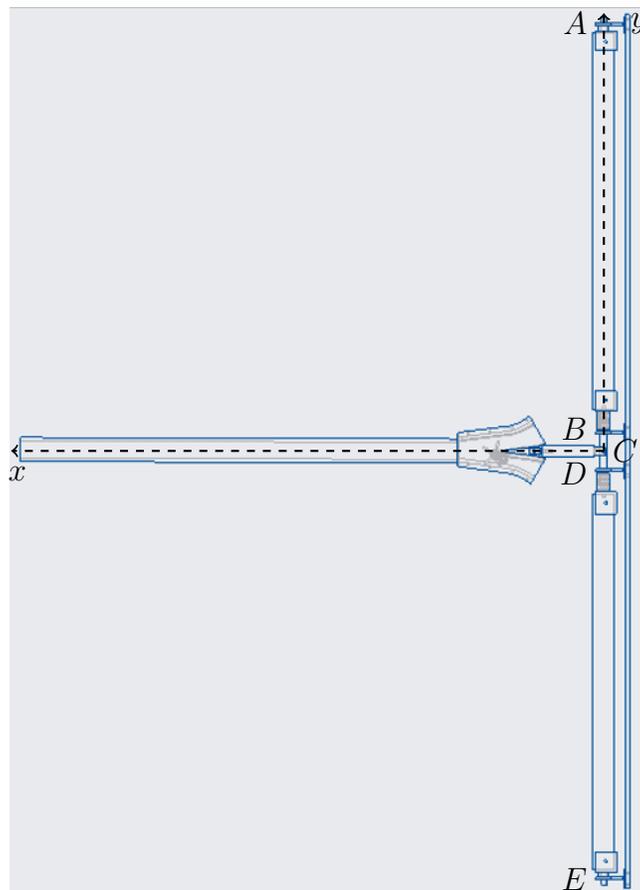


FIGURE C.1 – Modélisation du second réservoir

Nous supposons que les roulements qui se situent dans la partie inférieure des réservoirs, c'est-

à-dire aux points B et E , supporteront les charges radiales à cause de la gravité. Dans un premier temps, nous allons étudier le réservoir situé en bas, puis nous nous intéresserons au réservoir du haut. Mais d'abord, nous allons présenter les différents paramètres utilisés pour dimensionner le système :

- La distance entre le roulement intérieur et la liaison pivot entre le guide et l'arbre est égale à : $d_{BC} = d_{CD} = 60$ mm ;
- La distance entre le roulement extérieur et le roulement intérieur est de : $d_{AC} = d_{EC} = 1020$ mm ;
- La masse volumique de l'acier 1566 est de : $\rho_{acier} = 7,85$ g/cm³(18) ;
- La masse volumique de l'acrylique est de : $\rho_{acrylique} = 1,19$ g/cm³(20) ;
- La force de compression appliquée au point C est de : $N = 98,1$ N (d'après l'équation 1.28 pour $\theta = 45^\circ$).

Nous pouvons alors déterminer les différentes masses intervenant dans notre système.

La masse du réservoir est égale à : $m_r = \rho_{acrylique} V_r = 1.19 \times 278 = 0,33$ kg.

La masse de l'accouplement est de : $m_{acc} = \rho_{acier} V_{acc} = 8 \times 4,06 = 0,032$ kg.

La masse du roulement est égale à : $m_{roulement} = \rho_{acier} V_{roulement} = 8 \times 28,56 = 0,23$ kg.

La masse de la poutre est de : $m_{poutre} = 0,8136$ kg.

La masse du guide et de l'engrenage est égale à : $m_{GE} = 0,7828$ kg.

Grâce aux calculs de ces masses, nous pouvons déterminer la masse équivalente m définie par :

$$m = m_{acc} + m_{roulement} + m_{poutre} + m_{GE} \quad (\text{C.1})$$

Désormais, nous pouvons étudier le diagramme de corps libres du réservoir du bas est représenté sur la figure C.3.

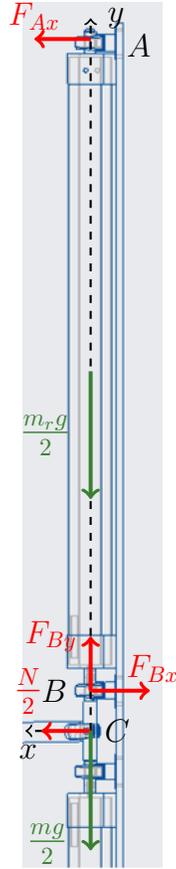


FIGURE C.2 – Diagramme de corps libre du réservoir du haut

D'après le principe fondamental de la statique, nous avons :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{Bx} = F_{Ax} + \frac{N}{2} \quad (\text{C.2})$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{By} = (m_r + \frac{m}{2})g \quad (\text{C.3})$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow F_{Ax} = \frac{Nd_{BC}}{2(d_{AC} - d_{BC})} \quad (\text{C.4})$$

Nous obtenons alors :

$$F_{Bx} = \frac{Nd_{AC}}{2(d_{AC} - d_{BC})} \quad (\text{C.5})$$

Puis, nous étudions le réservoir du bas, le diagramme de corps libres est représenté sur la figure C.2. La masse équivalente m est appliquée au point C .

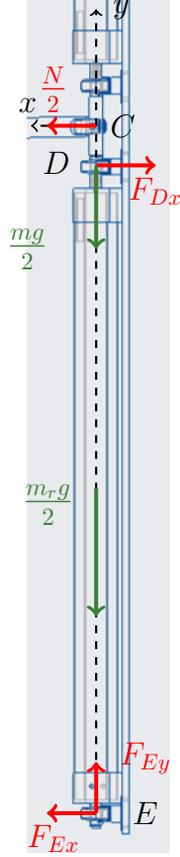


FIGURE C.3 – Diagramme de corps libre du réservoir du bas

D'après le principe fondamental de la statique, nous avons :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{Dx} = F_{Ex} + \frac{N}{2} \quad (\text{C.6})$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{Ey} = (m_r + \frac{m}{2})g \quad (\text{C.7})$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow F_{Ex} = \frac{Nd_{CD}}{2(d_{EC} - d_{CD})} \quad (\text{C.8})$$

Nous obtenons alors :

$$F_{Dx} = \frac{Nd_{EC}}{2(d_{EC} - d_{CD})} \quad (\text{C.9})$$

Dans un premier temps, nous allons dimensionner les roulements extérieurs (en A et E), d'après les données précédentes nous savons que $F_{Ax} = F_{Ex} = 3,07$ N. La force axiale est donc nulle. Les valeurs des coefficients détaillés et les formules ci-dessous sont tirés de (7).

Dans le cas d'une charge radiale pure, la charge statique équivalente P_0 est égale à :

$$P_0 = F_{radiale} = 3,07 \text{ N}$$

Puis, nous étudions les roulements intérieurs (en B et D), d'après les données précédentes nous savons que $F_{Bx} = F_{Dx} = 52,12$ N et que $F_{By} = F_{Dy} = 12,35$ N.

Dans le cas d'un roulement isolé, la charge statique équivalente P_0 est égale à :

$$P_0 = 0.6F_{radiale} + 0.5F_{axiale} = 37,45 \text{ N}$$

La condition $P_0 > F_{radiale}$ n'est donc pas respectée, nous choisissons la charge statique suivante :

$$P_0 = F_{radiale} = 37,45 \text{ N}$$

Ces calculs nous permettent de choisir les quatre roulements identiques par rapport à leurs charges statiques équivalentes P_0 . De plus, nous choisissons un diamètre intérieur facilitant la conception et le montage du système.

Bibliographie

- [1] F. Loe B. M. Zairi, D. Frank. Kinematics analysis of a robotic zipper prototype for miniaturization. *International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research*, 5, 2016.
- [2] P.R. Bonenberger. *The First Snap-fit Handbook : Creating and Managing Attachments for Plastics Parts*. 2016.
- [3] Garrett W. Brown. Suspension system for supporting and conveying equipment, such as a camera, 1983. US4625938A.
- [4] Foster Collins. Design of a spherical robot arm with the spiral zipper prismatic joint. In *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation 2016*, 2016.
- [5] Ioan Doroftei and Ioan Alexandru Doroftei. Deployable structures for architectural applications - a short review. In *Applied Mechanics and Materials*, volume 658, pages 233 – 240, 2014.
- [6] J. Bruyère et R. Colon de Carvajal. *Cours INSA Lyon, Engrenage cylindrique à denture droite*. 2018-2019.
- [7] Jean-Louis Fanchon. *Guide des sciences et technologies industrielles*. AFNOR éditions, 2013.
- [8] E. GRASS'MANN. Lifting jack, 1939. US2173685A.
- [9] Georges HENRIOT. Engrenages : Définition, dessin et calcul. *Techniques de l'ingénieur Transmission de puissance mécanique : engrenages et liens souples*, 1977.
- [10] Georges HENRIOT. Engrenages parallèles dentures corrigées. *Techniques de l'ingénieur Transmission de puissance mécanique : engrenages et liens souples*, base documentaire : TIB182DUO.(ref. article : bm5621), 2002.
- [11] ELIAS I-IOWE. Improvement in fastenings for garments, 1851. US8540.
- [12] © Gala Systems Inc. Spiralift : the world's most compact lifting system. <https://www.galasytems.com/en/spiralift/>, 2020. consulté le : 28 octobre 2020.

- [13] Geo Systems Inc. Zippermast. <https://zippermast.com/>, 2020. consulté le : 28 octobre 2020.
- [14] Kempf James. Self erecting zipper lift, 2011. US008069954B2.
- [15] Sheridan T. Landsberger S. Minimal, minimal linkage. the tension-compression parallel link manipulator. In *Transactions of the IMACS/SICE International Symposium on Robotics, Mechatronics and Manufacturing Systems*, pages 81 – 81, 1993.
- [16] Yim Mark. Linear motion device with extending tube for positioning, 2015. WO 2015/112815 A1.
- [17] Bayer MaterialScience. Snap-fit joints for plastics - a design guide. http://fab.cba.mit.edu/classes/S62.12/people/vernelle.noel/Plastic_Snap_fit_design.pdf, 2020. consulté le : 18 novembre 2020.
- [18] MatWeb. Aisi 1566 steel composition spec (uns g15660). <http://www.matweb.com/search/DataSheet.aspx?MatGUID=48b97b167222480e9d7e54dc321ddba0>, 2020. consulté le : 18 novembre 2020.
- [19] MatWeb. Overview of materials for polylactic acid (pla) biopolymer. <http://www.matweb.com/search/DataSheet.aspx?MatGUID=ab96a4c0655c4018a8785ac4031b9278>, 2020. consulté le : 18 novembre 2020.
- [20] McMASTER-CARR. Clear scratch and uv-resistant acrylic rectangular tube. <https://www.mcmaster.com/8516K39/>, 2020. consulté le : 18 novembre 2020.
- [21] Caio Mucchiani, Wilson O. Torres, Daniel Edgar, Michelle J. Johnson, Pamela Z. Cacchione, and Mark Yim. Development and deployment of a mobile manipulator for assisting and entertaining elders living in supportive apartment living facilities. In *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation 2016*, pages 121 – 128, 2018.
- [22] Gaston Nicolet. *Conception et calcul des éléments de machines*, volume 3. Ecole d'ingénieurs de Fribourg, 2006.
- [23] Andreas Pott. *Cable-driven parallel robots : Theory and application*, volume 120. Springer Tracts in Advanced Robotics, 2016.
- [24] Hello Robot™. Stretch™ research edition a new kind of robot. <https://hello-robot.com/product>, 2020. consulté le : 18 novembre 2020.
- [25] Jaramillo Ronald. Zbeam - shape shifting structures for space. <https://hackaday.io/project/25096-zbeam-shape-shifting-structures-for-space>, 2017. consulté le : 28 octobre 2020.

- [26] Alexander Spinos, Devin Carroll, Terry Kientz, and Mark Yim. Variable topology truss : Design and analysis. In *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, volume September, pages 2717 – 2722, 2017.
- [27] Yoon Woo-Keun. Extensible and retractable arm mechanism and robot arm, 2016. Life Robotics Inc., US20160375591A1.
- [28] Ketao Zhang, Chen Qiu, and Jian S. Dai. An extensible continuum robot with integrated origami parallel modules. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 8(3), 2016.