

MARISE GALLANT

**ÉTUDE DE L'EFFET DU JEU AUX ARTICULATIONS
PASSIVES ET DE LA FLEXIBILITÉ DES MEMBRURES
SUR LES PROPRIÉTÉS DES MANIPULATEURS
PARALLÈLES**

Thèse présentée
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de doctorat en génie mécanique
pour l'obtention du grade de Philosophiæ Doctor (Ph.D.)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

2008

Résumé court

Pour une posture souhaitée d'un manipulateur parallèle, la flexibilité des membrures et des articulations actionnées, ainsi que le jeu aux articulations rotoïdes passives, permettent un mouvement du manipulateur, même lorsque ses actionneurs sont immobilisés.

Cette thèse comprend une étude de quelques caractéristiques des manipulateurs parallèles lorsque le jeu et la flexibilité sont considérés. Celle-ci comprend la distribution de la précision possible à l'intérieur de l'espace de travail, les propriétés cinématiques, dont la dextérité et la raideur, mais plus particulièrement les configurations singulières qui correspondent à une dextérité nulle. En considérant un jeu et une flexibilité finis, les courbes singulières deviennent des zones singulières. Ces zones peuvent réduire considérablement l'espace de travail utile des manipulateurs. Ainsi une configuration qui ne correspond pas, en théorie, à une configuration singulière, peut le devenir.

Résumé

Pour une posture souhaitée de l'organe terminal d'un manipulateur, la flexibilité des membrures et des articulations actionnées, ainsi que le jeu aux articulations rotoïdes passives, permettent un mouvement du manipulateur, même lorsque ses actionneurs sont immobilisés. Ce mouvement n'est pas contraint et dépend des forces et moments appliqués.

Cette thèse comprend une étude en deux parties de quelques caractéristiques des manipulateurs lorsque le jeu et la flexibilité sont considérés. La première partie comprend l'espace de travail et la distribution de la précision possible à l'intérieur de celui-ci, en calculant la plus grande erreur possible et l'amplitude du mouvement. La deuxième partie de l'étude comprend les propriétés cinématiques, dont la dextérité et la raideur. Le mouvement permis par le jeu et la flexibilité cause une dégradation des propriétés cinématiques.

Des algorithmes pour l'étude de l'effet du jeu et de la flexibilité (tension/compression et flexion) sont présentés pour un total de six manipulateurs. Ces algorithmes varient, selon le type de chaîne cinématique : articulations \underline{RPR} , \underline{SPS} , ou \underline{RRR} (R = rotoïde, P = prismatique, S = sphérique, l'articulation actionnée étant soulignée) et selon les sorties et le nombre de degrés de liberté (DDL) : position seulement (2 DDL, 3 DDL), orientation seulement (3 DDL) ou position et orientation combinées (manipulateurs plans à 3 DDL).

À l'intérieur de l'espace de travail, certaines zones sont plus sensibles au jeu et à la flexibilité et le manipulateur peut voir une plus grande diminution de sa dextérité et de

sa raideur. L'aspect le plus important de l'étude des propriétés cinématiques d'un manipulateur est de connaître ses configurations singulières, correspondant à une dextérité nulle. Les configurations singulières d'un manipulateur peuvent être représentées par des courbes exprimées dans le même espace cartésien que son espace de travail. Si les courbes des singularités se trouvent à l'intérieur des frontières de l'espace de travail, elles limitent l'espace de travail utile, puisque l'organe terminal d'un manipulateur ne doit habituellement pas traverser celles-ci.

En considérant un jeu et une flexibilité finis, les courbes singulières deviennent des zones singulières. Ces zones réduisent davantage l'espace de travail utile des manipulateurs. Ainsi, une configuration qui ne correspond pas, en théorie, à une configuration singulière, peut le devenir si les jeux ne sont pas nuls ou si la raideur n'est pas infinie.

Avant-propos

J'aimerais tout d'abord remercier très sincèrement le professeur Clément Gosselin pour sa direction, sa disponibilité, son appui et sa patience. Son dévouement envers les membres du laboratoire de robotique, sa passion pour la recherche, ses amples connaissances, ses idées originales, sans oublier sa gentillesse font de lui un directeur remarquable.

Je tiens à remercier mes collègues du laboratoire de robotique qui ont rendu mon séjour agréable, mémorable même, avec leur support et leur amitié.

Je remercie l'Université Laval et le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) pour leur soutien financier.

Finalement, je souhaite remercier mes parents et mon mari pour leur encouragement.

Table des matières

Résumé court	i
Résumé	ii
Avant-propos	iv
Table des matières	v
Liste des tableaux	ix
Liste des figures	x
1 Introduction	1
1.1 Problématique	1
1.2 Objectifs	3
1.3 Structure de la thèse	4
2 Revue de littérature	6
2.1 Espace de travail	6
2.2 Jeu aux articulations rotoïdes	8
2.3 Propriétés cinématiques	9
2.3.1 Singularités	9
2.3.2 Dextérité et précision	11
2.3.3 Raideur et flexibilité	13
2.4 Ouvrages les plus pertinents	14

3	Géométrie, espace de travail et propriétés cinématiques	17
3.1	Géométrie et problème géométrique inverse	18
3.1.1	Manipulateur \underline{RPR} plan à deux DDL	19
3.1.2	Manipulateur spatial \underline{SPS} à trois DDL	19
3.1.3	Manipulateur \underline{RPR} plan à trois DDL	20
3.1.4	Manipulateur sphérique \underline{SPS} à trois DDL	22
3.1.5	Manipulateur \underline{RRR} plan à deux DDL	24
3.1.6	Manipulateur \underline{RRR} plan à trois DDL	27
3.2	Espace de travail	31
3.2.1	Manipulateurs plans à deux DDL	31
3.2.2	Manipulateurs plans à trois DDL et spatial à trois DDL	33
3.2.3	Manipulateur sphérique à trois DDL	36
3.3	Équations de vitesse et matrices jacobiennes	37
3.3.1	Manipulateur \underline{RPR} plan à deux DDL et spatial à trois DDL	39
3.3.2	Manipulateur \underline{RRR} plan à deux DDL	40
3.3.3	Manipulateur \underline{RPR} plan à trois DDL	41
3.3.4	Manipulateur \underline{RRR} plan à trois DDL	42
3.3.5	Manipulateur sphérique à trois DDL	44
3.4	Propriétés cinématiques	44
3.4.1	Singularités	44
3.4.2	Dextérité	46
3.4.3	Raideur	49
4	L'effet du jeu et de la flexibilité	51
4.1	Modélisation du jeu dans les articulations rotoïdes passives	52
4.2	Espace d'incertitude dû au jeu	54
4.2.1	Manipulateurs avec chaînes \underline{RPR} ou \underline{SPS}	55
4.2.2	Manipulateurs avec chaînes \underline{RRR}	59
4.3	Modélisation de la flexibilité dans les membrures	60
4.3.1	Manipulateurs avec chaînes \underline{RPR} ou \underline{SPS}	60
4.3.2	Manipulateurs avec chaînes \underline{RRR}	61
4.4	Espace d'incertitude dû au jeu et à la flexibilité	63
4.5	La zone des singularités	65
4.5.1	Manipulateurs avec chaînes \underline{RPR} ou \underline{SPS}	66
4.5.2	Manipulateurs avec chaînes \underline{RRR}	76
4.6	La variation des propriétés cinématiques	78
4.7	Sommaire	80

5	Résultats pour des manipulateurs avec articulations prismatiques actionnées	81
5.1	Manipulateur plan à deux DDL	82
5.1.1	Erreur de position	83
5.1.2	Zones de singularité et dextérité	84
5.1.3	Dégradation de la raideur	88
5.1.4	Comparaison de la distribution de l'erreur et de la dextérité . .	90
5.2	Manipulateur spatial à trois DDL	91
5.2.1	Zones de singularité	91
5.2.2	Erreur de position	92
5.2.3	Dégradation de la dextérité	93
5.2.4	Dégradation de la raideur	94
5.2.5	Comparaison de la distribution de l'erreur et de la dextérité . .	94
5.3	Manipulateur plan à trois DDL	95
5.3.1	Zones des singularités	97
5.3.2	Erreur de position et d'orientation	100
5.3.3	Dégradation de la dextérité et de la raideur	102
5.3.4	Comparaison de la distribution de l'erreur et de la dextérité . .	104
5.4	Manipulateur sphérique à trois DDL	111
5.4.1	Erreur d'orientation	111
5.4.2	Zones des singularités	112
5.4.3	Dégradation de la dextérité et de la raideur	117
5.4.4	Comparaison de la distribution de l'erreur et de la dextérité . .	118
5.5	Sommaire	119
6	Résultats pour des manipulateurs avec articulations rotoïdes actionnées	122
6.1	Manipulateur plan à deux DDL	123
6.1.1	Erreur de position	127
6.1.2	Zones des singularités et dextérité	131
6.1.3	Dégradation de la raideur	131
6.1.4	Comparaison de la distribution de l'erreur et de la dextérité . .	134
6.2	Manipulateur plan à trois DDL	134
6.2.1	Erreur de position et d'orientation	141
6.2.2	Zones des singularités	145
6.2.3	Dégradation de la dextérité et de la raideur	146
6.2.4	Comparaison de la distribution de l'erreur et de la dextérité . .	150

6.3	Sommaire	154
7	Conclusion	156
7.1	Sommaire et contributions principales	157
7.2	Travaux futurs et directions potentielles de recherche	159
	Bibliographie	161

Liste des tableaux

4.1	Signes à utiliser dans les équations (4.19-4.20).	70
5.1	Architecture du 3-R <u>P</u> R plan.	97
5.2	Architecture du 3-S <u>P</u> S sphérique.	111
6.1	Architecture du 2-R <u>R</u> R, solution 1.	124
6.2	Architecture du 2-R <u>R</u> R, solution 2.	125
6.3	Architecture du 3-R <u>R</u> R plan.	137

Liste des figures

3.1	Manipulateur \underline{RPR} plan à deux DDL.	19
3.2	Manipulateur \underline{SPS} spatial à 3 DDL.	20
3.3	Manipulateur \underline{RPR} plan à 3 DDL.	21
3.4	Manipulateur \underline{SPS} sphérique à 3 DDL.	22
3.5	Angles qui définissent l'inclinaison.	24
3.6	Manipulateur plan $\underline{2RRR}$ à deux DDL.	25
3.7	Manipulateur $\underline{2RRR}$ plan à deux DDL et ses quatre solutions.	28
3.8	Manipulateur $\underline{3RRR}$ plan à trois DDL.	29
3.9	Les huit solutions au PGI du manipulateur plan à 3 DDL ($\underline{3RRR}$). . .	32
3.10	Espace de travail d'un manipulateur plan à 2 DDL du type \underline{RPR}	33
3.11	Espace atteignable d'une patte \underline{RRR}	34
3.12	Manipulateur parallèle spatial à 3 DDL.	35
3.13	Limites de l'espace de travail sphérique représentée par un cylindre. . .	37
3.14	Singularité de type II du manipulateur parallèle plan à 3 DDL avec actionneurs prismatiques.	43
3.15	Espace d'incertitude et recherche d'une intersection avec la courbe des singularités.	46
3.16	Espace de travail et discrétisation.	47
4.1	Modèle du jeu dans une articulation rotoïde passive.	52
4.2	Effet du jeu sur la longueur d'une patte.	53
4.3	Membrures \underline{RR} dans deux types de chaînes cinématiques lorsque les ac- tionneurs sont immobiles.	54

4.4	Espace d'incertitude dû au jeu et morceau à éliminer.	55
4.5	Variation des espaces d'incertitudes dû au jeu.	56
4.6	Espace d'incertitude à trois dimensions du 3-RPR plan discrétisé selon ϕ	57
4.7	Deux couches successives d'un espace 3D projetées dans un même plan.	58
4.8	Manipulateur RPR équivalent à 2 DDL.	60
4.9	Chaîne cinématique flexible du type RRR soumise à une force F	61
4.10	Poutre encastree : modélisation de la flexion.	62
4.11	Modélisation de la flexion et du jeu.	64
4.12	Un manipulateur 2-RPR plan en configuration singulière, en raison du jeu.	65
4.13	Deux points, A et B, chacun avec son espace d'incertitude.	67
4.14	Les trois sections à considérer pour l'obtention des zones de singularités.	68
4.15	La base fixe du tripode dans le plan xy , divisée en sept sections.	70
4.16	Intersection de l'espace d'incertitude et des singularités.	72
4.17	Début de la formation de la zone des singularités, selon la méthode présentée.	74
4.18	Algorithme pour la détermination de la zone des singularités du manipulateur 3-RPR plan.	75
4.19	Choix des points formant la zone des singularités.	77
4.20	Variation de la dextérité dans l'espace de travail du manipulateur 2-RPR plan.	79
4.21	Variation de la dextérité dans un espace d'incertitude du manipulateur 2-RPR plan.	80
5.1	Espace d'incertitude dû au jeu dans les articulations.	82
5.2	Effet de la flexibilité et du jeu sur la position.	84
5.3	Variation totale de position selon l'axe x , pour $\delta = 0,02$ m.	85
5.4	Variation totale de position selon l'axe y , pour $\delta = 0,02$ m.	85
5.5	Effet de la grandeur du jeu sur l'étendue de la zone des singularités.	86
5.6	Comparaison de la dextérité avec $\delta = 0,02$ m et sans jeu.	87
5.7	Dégradation possible de la dextérité avec $\delta = 0,02$ m.	88
5.8	Comparaison de la raideur selon l'axe x avec $\delta = 0,02$ m et sans jeu.	89
5.9	Comparaison de la raideur selon l'axe y avec $\delta = 0,02$ m et sans jeu.	89
5.10	Comparaison de la dégradation de la raideur selon l'axe x lorsque $\delta = 0,02$ et $\delta = 0,04$ m.	90
5.11	Dextérité en fonction de l'erreur maximale lorsque $\delta = 0,02$	91

5.12	Hauteur de la zone des singularités causée par le jeu $\delta = 0,02$ m. . . .	92
5.13	Variation totale possible de z causée par le jeu, à deux valeurs imposées de $z : z = 0,8$ et $z = 1,2$ m.	93
5.14	Dextérité avec $\delta = 0,02$ m et sans jeu pour une valeur choisie de $z = 0,8$ m.	94
5.15	Raideur selon l'axe z avec $\delta = 0,02$ m et sans jeu pour une valeur choisie de $z = 0,8$ m.	95
5.16	Dextérité en fonction de l'erreur maximale lorsque $z = 0,8$	96
5.17	Dextérité en fonction de l'erreur maximale lorsque $z = 1,2$	96
5.18	Courbe des singularités à une orientation constante de $\phi = 60^\circ$ et la zone des singularités avec $\delta = 0,01$ et $\delta = 0,02$ m.	98
5.19	Courbe des singularités à une orientation constante de $\phi = -30^\circ$ et la zone des singularités avec $\delta = 0,01$ m.	99
5.20	Courbe des singularités à des orientations constantes de $\phi = -40^\circ, -30^\circ, -25^\circ$ et -20°	99
5.21	Courbe des singularités à une orientation constante de $\phi = 20^\circ$ et la zone des singularités avec $\delta = 0,02$ m.	100
5.22	Courbe des singularités à des orientations constantes de $\phi = -10^\circ, 0^\circ$ et 10°	101
5.23	Courbe des singularités à une orientation constante de $\phi = 0^\circ$ et la zone des singularités avec $\delta = 0,02$ m	101
5.24	Espaces d'incertitudes à une orientation constante voulue de $\phi = 60^\circ$ et un jeu de $0,01$ m.	102
5.25	Espaces d'incertitudes à une orientation constante voulue de $\phi = 0^\circ$ et un jeu de $0,01$ m.	103
5.26	Variation possible de ϕ pour une orientation constante souhaitée de $\phi = -30^\circ$ et un jeu de $0,01$ m.	104
5.27	Dextérité à une orientation constante choisie $\phi = 0^\circ$ sans jeu et avec un jeu de $0,01$ m.	105
5.28	Dextérité à une orientation constante choisie $\phi = -30^\circ$ sans jeu et avec un jeu de $0,01$ m.	105
5.29	Dégradation de la raideur selon l'axe y à une orientation constante choisie $\phi = -30^\circ$ sans jeu et avec un jeu de $0,01$ m.	106
5.30	Les boîtes discrétisées dans les espaces de travail à orientation constante.	107
5.31	Dextérité en fonction de l'erreur maximale lorsque $\phi = -30^\circ$ et $\delta = 0,01$	108
5.32	Dextérité en fonction de l'erreur maximale lorsque $\phi = 0^\circ$ et $\delta = 0,01$	109

5.33	Dextérité en fonction de l'erreur maximale lorsque $\phi = 60^\circ$ et $\delta = 0,01$	110
5.34	Espaces d'incertitudes et courbes des singularités pour $\delta = 0,01$.	113
5.35	Variation totale possible de σ et courbes des singularités pour $\delta = 0,01$.	114
5.36	Courbes des singularités aux torsions constantes : $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ et 60° .	115
5.37	Zones singulières et courbes des singularités pour $\delta = 0,01$.	116
5.38	Variation de la dextérité pour $\delta = 0,01$ et courbes des singularités.	117
5.39	Variation de la raideur autour de l'axe z pour $\delta = 0,01$ et courbes des singularités.	118
5.40	Dextérité en fonction de l'erreur maximale pour le manipulateur sphérique.	120
6.1	Espaces d'incertitudes dus au jeu et à la flexibilité : solution 1.	124
6.2	Espaces d'incertitudes dus au jeu et à la flexibilité : solution 2.	125
6.3	Courbes des singularités pour la solution 2.	126
6.4	Mouvement possible de l'organe terminal : solution 1.	128
6.5	Manipulateur à un point choisi de l'espace de travail et l'espace d'incertitude correspondant : solution 1.	129
6.6	Mouvement possible de l'organe terminal : solution 2.	130
6.7	Zones singulières et courbe des singularités.	132
6.8	Dextérité avec et sans le jeu et la flexibilité et les courbes des singularités.	133
6.9	Raideur selon l'axe x avec et sans le jeu et la flexibilité.	135
6.10	Raideur selon l'axe y avec et sans le jeu et la flexibilité.	136
6.11	Les boîtes discrétisées dans chaque espace de travail.	137
6.12	Dextérité en fonction de l'erreur maximale pour le manipulateur 2-RRR plan.	138
6.13	Espace de travail, courbes des singularités et manipulateur pour deux solutions au PGI.	139
6.14	Espace de travail, courbes des singularités et manipulateur pour six solutions au PGI.	140
6.15	Espaces d'incertitudes pour $\phi = 0^\circ$, avec $\delta = 0,02$ m : solution 1.	142
6.16	Espaces d'incertitudes pour $\phi = -60^\circ$, avec $\delta = 0,02$ m : solution 1.	142
6.17	Espaces d'incertitudes pour $\phi = 0^\circ$, avec $\delta = 0,02$ m : solution 2.	143
6.18	Espaces d'incertitudes pour $\phi = -60^\circ$, avec $\delta = 0,02$ m : solution 2.	143
6.19	Variation possible de ϕ pour $\phi = 0^\circ$, avec $\delta = 0,02$ m : solution 1.	144
6.20	Variation possible de ϕ pour $\phi = -60^\circ$, avec $\delta = 0,02$ m : solution 1.	144
6.21	L'espace d'incertitude correspondant au point $(x, y) = (0, -1,7)$, $\phi = 0^\circ$.	145

6.22	Courbe des singularités à $\phi = -60^\circ$ et la zone des singularités avec $\delta = 0,01$ m et $\delta = 0,02$ m : solution 1.	146
6.23	Courbe des singularités à $\phi = 0^\circ$ et la zone des singularités avec $\delta = 0,01$ m et $\delta = 0,02$ m : solution 1.	147
6.24	Courbe des singularités à $\phi = -60^\circ$ et la zone des singularités avec $\delta = 0,01$ m : solution 2.	148
6.25	Courbe des singularités à $\phi = 0^\circ$ et la zone des singularités avec $\delta = 0,01$ m : solution 2.	149
6.26	Dextérité à $\phi = -60^\circ$ sans jeu et sans flexibilité et avec $\delta = 0,01$ m. . .	149
6.27	Dextérité à $\phi = 0^\circ$ sans jeu et sans flexibilité et avec $\delta = 0,01$ m. . .	150
6.28	Raideur à $\phi = -60^\circ$ sans jeu et sans flexibilité et avec $\delta = 0,01$ m. . .	151
6.29	Raideur à $\phi = 0^\circ$ sans jeu et sans flexibilité et avec $\delta = 0,01$ m. . .	151
6.30	Les boîtes discrétisées dans les espaces de travail à orientation constante.	152
6.31	Dextérité en fonction de l'erreur maximale pour le manipulateur 3- <u>R</u> RR plan.	153

Chapitre 1

Introduction

1.1 Problématique

Le début de la robotique moderne a eu lieu à la fin des années soixante, où l'arrivée des microprocesseurs a rendu possible la commande des robots par ordinateur. L'économie mondiale de l'époque a permis l'automatisation de l'industrie, donc le développement des systèmes de conception et de fabrication par ordinateur et l'utilisation des robots industriels [1,2].

Pendant longtemps, les tâches associées aux manipulateurs, presque tous sériels, étaient relativement simples et ne demandaient pas une précision élevée. À l'approche des années quatre-vingt-dix sont arrivées de nouvelles applications demandant plus de précision à des vitesses plus élevées. Le besoin de développer de nouvelles structures pour combler les lacunes des manipulateurs sériels alors utilisés était clair.

Un manipulateur sériel est une chaîne cinématique ouverte, formée de membres reliés en série par des articulations actionnées. Les manipulateurs parallèles sont constitués d'une base fixe, d'une plate-forme mobile et de chaînes cinématiques de type sériel reliant la base à la plate-forme. Des chaînes cinématiques fermées sont ainsi formées. Contrairement aux manipulateurs sériels, certaines articulations des manipulateurs parallèles ne sont pas actionnées, donc passives. Un organe terminal est placé au bout du dernier membre du manipulateur sériel, ou dans le cas des manipulateurs parallèles, n'importe où sur la plate-forme mobile.

Les avantages des manipulateurs parallèles, en comparaison avec les manipulateurs sériels, sont leur raideur et leur précision accrue [3,4]. De plus, puisque les actionneurs peuvent être placés sur la base ou près de celle-ci, les propriétés dynamiques sont meilleures, l'inertie des parties mobiles étant grandement réduite. Lorsque de fortes charges sont appliquées ou que des vitesses élevées et grandes précisions sont requises, ces attributs deviennent nécessaires.

Depuis les années quatre-vingts, plus de chercheurs se sont intéressés aux problèmes d'analyse, de design et de commande des manipulateurs parallèles, et leurs caractéristiques sont plus connues [5].

Dans presque toutes les applications robotiques, l'optimisation de la dextérité est effectuée et différentes méthodes sont utilisées [6]. La dextérité est une mesure de la performance cinématique et/ou dynamique du manipulateur. L'optimisation des propriétés cinématiques et l'identification des configurations singulières ont attiré l'attention de plusieurs chercheurs et un survol de leurs travaux est présenté au premier chapitre. Les configurations qui correspondent à une singularité (dextérité nulle) ont comme résultat un changement instantané du nombre de degrés de liberté, une perte de contrôle et donc une dégradation de la raideur caractéristique et recherchée des manipulateurs parallèles.

Une source d'erreur importante chez les manipulateurs sériels est la flexion dans les membrures [7]. Pour réduire la flexion, les membres sont construits de façon plus rigide, ce qui les rend lourds. Le rapport raideur/poids est donc faible. De plus, la grande inertie du manipulateur rend sa commande plus complexe à grande vitesse.

Avec les manipulateurs parallèles, il est possible de placer les actionneurs près de la

base fixe et même sur celle-ci afin d'améliorer les propriétés dynamiques. Les forces et les moments appliqués à l'organe terminal sont partagés entre les chaînes cinématiques dans le cas de ces manipulateurs. Malgré ceci, il est important de considérer la flexibilité des manipulateurs parallèles afin d'augmenter davantage la précision.

La flexibilité n'est pas la seule source d'erreur d'un manipulateur. Il faut aussi inclure les erreurs de position et d'orientation dues au jeu dans les articulations. Ces erreurs variables dépendent non seulement de la posture voulue du manipulateur, mais aussi des forces présentes. Lors du design d'un manipulateur pour une tâche donnée, lors de l'étude des propriétés d'un manipulateur dans l'ensemble de son espace de travail, ou bien lors de la planification d'une trajectoire, il peut s'avérer important de connaître les zones les plus sensibles à ces sources d'erreur qui ne peuvent pas être éliminées par l'étalonnage.

L'effet du jeu dans les articulations passives et de la flexibilité des membrures sur l'erreur de positionnement et d'orientation est un domaine encore peu exploré. Les études de leurs effets sur les propriétés cinématiques, telles que la dextérité et la raideur, sont pratiquement absentes de la littérature.

1.2 Objectifs

L'objectif global de ce travail consiste à développer des méthodes pour mieux connaître les propriétés réelles d'un manipulateur, dans le but d'assister l'optimisation et l'adaptation d'un site robotisé à une tâche donnée ou dans le but d'assister l'optimisation des propriétés d'un manipulateur à l'étape du design.

L'étude des propriétés des manipulateurs comprend les erreurs de précision dues à la flexibilité des membrures et des articulations et dues au jeu dans les articulations passives, les configurations singulières additionnelles dues à ces erreurs, et la dégradation possible de la dextérité et de la raideur.

Les erreurs de précision varient d'un endroit à un autre à l'intérieur de l'espace de travail. Cette thèse contient des cartes de la variation de ces erreurs pour tous les mécanismes étudiés. De plus, elle contient des cartes de la distribution des propriétés

cinématiques, avec et sans la dégradation causée par le jeu et la flexibilité. Ces cartes, en donnant une vue d'ensemble, facilitent l'analyse de l'effet du jeu et de la flexibilité.

Malgré l'importance de la précision et des propriétés cinématiques, l'objectif principal, qui est aussi la plus grande contribution de cette thèse, est l'obtention des zones singulières. L'espace de travail d'un manipulateur sans jeu, avec une raideur infinie peut contenir des courbes où le manipulateur aura une dextérité nulle et sera en configuration singulière. En considérant un jeu et une flexibilité finis, les courbes singulières deviennent des zones singulières. Connaître l'étendue de ces zones peut aider à la planification d'une tâche ou au design d'un manipulateur.

Des algorithmes ont été développés pour six architectures différentes. Ceux-ci varient selon le type de chaîne cinématique ($\underline{\text{RPR}}$, $\underline{\text{SPS}}$ ou $\underline{\text{RRR}}$), selon le nombre de degrés de liberté et selon les sorties (positions et/ou orientations) considérées.

1.3 Structure de la thèse

La revue de littérature du prochain chapitre débute par l'examen des méthodes de détermination de l'espace de travail et la définition des différents types d'espaces de travail. Différentes modélisations du jeu aux articulations rotoïdes sont présentées, ainsi que des travaux sur le sujet du mouvement permis par le jeu. Ensuite, des travaux divers portant sur les configurations singulières, leur classification, les méthodes utilisées pour obtenir les courbes des singularités et l'évitement des singularités sont examinés. Quelques méthodes de calcul de la dextérité sont incluses, suivies par des méthodes de calcul de la raideur. Pour finir, des modèles existants pour représenter la flexibilité sont présentés.

L'architecture des six manipulateurs étudiés est présentée au chapitre 3, ainsi que le problème géométrique inverse de chacun. Les manipulateurs plans sont le $\underline{2\text{-RPR}}$, le $\underline{3\text{-RPR}}$, le $\underline{2\text{-RRR}}$ et le $\underline{3\text{-RRR}}$. Le manipulateur spatial est le $\underline{3\text{-SPS}}$ (tripode) et le manipulateur sphérique est du type $\underline{3\text{-SPS}}$. Tous ces manipulateurs sont connus. Ce chapitre contient la description des méthodes utilisées pour obtenir les espaces de travail requis dans le reste de la thèse, les équations de vitesse, les matrices jacobiennes et les méthodes utilisées pour obtenir les courbes des singularités, la dextérité et la raideur

locale des manipulateurs.

Le chapitre 4 présente premièrement la modélisation choisie du jeu dans les articulations rotoïdes, ainsi que celle choisie pour la flexibilité des membrures. Suivent ensuite les étapes pour obtenir les espaces d'incertitudes dus au jeu et à la flexibilité et les erreurs de précision. Les algorithmes pour l'obtention des zones des singularités sont présentés. Pour finir, les algorithmes pour la détermination des pires dégénérescences possibles de la dextérité et de la raideur sont présentés.

Les résultats sont divisés en deux chapitres, selon le type d'articulation actionnée. Le chapitre 5 contient les résultats pour les quatre manipulateurs ayant des articulations prismatiques actionnées et le chapitre 6 contient les résultats des deux manipulateurs ayant des chaînes cinématiques du type $\underline{R}RR$.

Chapitre 2

Revue de littérature

Plusieurs catégories d'ouvrages sont pertinents aux travaux qui ont été effectués dans le cadre de cette thèse. Un survol est présenté, divisé en catégories : l'espace de travail, le jeu aux articulations et les propriétés cinématiques, qui comprennent les singularités, la dextérité et la raideur. Pour finir, l'utilité de certains ouvrages pour les travaux de cette thèse est présenté.

2.1 Espace de travail

Il existe quelques types d'espace de travail. Pour des manipulateurs plans à 3 DDL, on retrouve parmi ceux-ci l'espace atteignable, qui regroupe tous les points dans le plan pouvant être atteints avec au moins une orientation de l'organe terminal, l'espace dextre

qui contient tous les points pouvant être atteints à toutes les orientations et l'espace à orientation constante (le plus commun), qui est l'ensemble des points atteignables à une orientation choisie [3, 8, 9].

Différentes méthodes de détermination de l'espace de travail sont utilisées. Gosselin a démontré, à l'aide d'une méthode géométrique, que les frontières de l'espace de travail à orientation constante d'un manipulateur parallèle à 6 DDL sont constituées de portions de sphères (en trois dimensions) ou d'arcs de cercle, si on considère une tranche du volume de l'espace de travail [10]. De la même façon, la frontière de l'espace de travail à orientation constante d'un manipulateur parallèle plan est composé d'arcs de cercle.

Puisque cette approche géométrique est simple et qu'elle donne des résultats exacts, elle est choisie par certains auteurs pour être incluse dans un cycle d'optimisation [11–14] ou pour superposer des courbes de résultats sur l'espace de travail [15–17]. L'espace atteignable est l'union de tous les espaces à orientation constante et peut être obtenu en incrémentant l'orientation. Une méthode géométrique plus générale, pouvant être utilisée pour tous les manipulateurs plans : sériel, parallèle ou hybride, a été développée par Ricard et Gosselin [8].

La discrétisation est utilisée pour l'obtention de l'espace de travail, soit pour son optimisation ou pour y superposer des résultats. On peut retrouver des discrétisations par points [18, 19] ou par cubes dans un espace 3D [20].

Kumar [9] détermine les frontières de quelques types d'espace de travail, dont l'espace atteignable et l'espace dextre, à l'aide d'une méthode basée sur les torseurs. L'auteur illustre la méthode à l'aide de manipulateurs plans, mais celle-ci peut être appliquée aux manipulateurs spatiaux. Une méthode numérique basée sur le recuit simulé, pouvant être appliquée aux manipulateurs plans d'architecture générale, est utilisée par Dibakar et Mruthyunjaya [21]. Une méthode d'analyse géométrique de l'espace atteignable, à partir des coordonnées homogènes de celui-ci dans l'espace projectif, est présentée par Hayes [22]. La méthode est utile pour toutes les configurations de manipulateurs parallèles plans à 3 DDL ayant des chaînes cinématiques comprenant des articulations rotoïdes et/ou prismatiques.

L'espace de travail des manipulateurs sphériques a une nature différente de celle des manipulateurs plans et est plus difficile à tracer. Les manipulateurs sphériques servent

à l'orientation dans l'espace 3D. L'espace de travail peut être représenté en 3D par les paramètres d'Euler-Rodrigues de la matrice de rotation de l'organe terminal [23]. La matrice de rotation exprimée selon la convention ZYZ d'Euler est favorisée par les auteurs dans le domaine de la robotique lorsqu'une convention d'Euler est choisie [24, 25]. Dans [24], l'espace de travail (illimité) est représenté en 2D pour une valeur constante de l'angle de la première matrice de la convention ZYZ d'Euler. Les deux axes sont la tangente du demi-angle de la deuxième matrice et l'angle de la dernière matrice. Le but est de représenter les singularités.

Quelques auteurs ont obtenu analytiquement les frontières de l'espace de travail de manipulateurs sphériques, dont [23, 26, 27]. Les méthodes consistent à obtenir les singularités du type I, selon la classification présentée par [28], où ces singularités correspondent aux frontières de l'espace de travail.

Une convention ZYZ d'Euler modifiée (*tilt and torsion*), est présentée par Bonev et Ryu [29]. L'espace de travail est représenté en coordonnées cylindriques où la hauteur est la torsion autour d'un axe z, le rayon est l'inclinaison par rapport au même axe z et l'angle donne l'azimut de l'inclinaison. Les avantages de cette représentation ont été démontrés [30]. Les courbes des singularités peuvent également être exprimées selon la même représentation et être superposés sur l'espace de travail [31].

2.2 Jeu aux articulations rotoïdes

Plusieurs auteurs s'entendent sur la nécessité de l'étude de l'effet du jeu aux articulations [19, 32–37]. Dans le cas de Han et al. [37], un prototype (le 3-UPU de SNU) exhibe de grands mouvements lorsque les articulations actionnées sont immobilisés. Ils ont expliqué ce phénomène avec une étude du jeu aux articulations et ont validé les résultats expérimentalement. Une autre explication à ces mouvements est présenté par [38, 39] dans la sous-section 2.3.1.

Le jeu aux articulations rotoïdes est modélisé en deux dimensions par des approches différentes. Ting, Zhu et Watkins [40] présentent un modèle géométrique qui identifie les plus grandes erreurs de position et d'orientation dues au jeu des articulations afin de déterminer la précision d'un mécanisme. Leur approche peut s'appliquer à des ma-

nipulateurs parallèles plans ayant des articulations rotoïdes. Dans leur modèle, les jeux sont modélisés chacun par une membrure ayant une longueur égale à la moitié de la dimension du jeu et une articulation actionnée rotoïde supplémentaire. Selon ce modèle, le mécanisme à quatre barres (un DDL) aurait huit barres et 5 actionneurs rotoïdes. Tsai et Lai [41] modélisent aussi le jeu en ajoutant des membrures. La position d'un manipulateur est obtenue numériquement pour une position et un torseur donnés. Le nombre d'actionneurs reste le même.

D'autres tiennent compte du jeu en faisant varier la longueur de certaines membrures pour obtenir un espace de travail une fois les articulations immobilisées [19,34,36,42,43]. Cette approche est utilisée de la même façon pour des articulations sphériques.

Wang et Roth [44] étudient les erreurs en position dues au jeu dans les articulations rotoïdes, en considérant l'articulation en 3D. Les équations présentées relient la géométrie des articulations et les forces externes aux erreurs de position. Ils définissent les différents modes de contact possibles dans chaque articulation afin de calculer l'erreur transmise. Les articulations rotoïdes sont aussi modélisées en 3D par d'autres auteurs [32,33,35]. Il est plus rare de voir la modélisation du jeu dans une articulation prismatique, mais de tels travaux existent [45].

Pour éviter les problèmes associés au jeu présent dans les articulations passives, certains remplacent ceux-ci par des articulations flexibles [46–51]. C'est un moyen d'atteindre des niveaux de précision autrement impossibles, dans certains cas. Il permet d'éviter le backlash et élimine le frottement.

2.3 Propriétés cinématiques

2.3.1 Singularités

Les approches utilisées par les chercheurs pour l'étude des lieux de singularité, leur classification, leur obtention et leur évitement sont très diversifiées. Gosselin et Angeles [28] classifient les singularités d'un manipulateur parallèle en trois groupes principaux, en se basant sur les matrices jacobienues. Le premier type correspond aux

frontières de l'espace de travail, le deuxième peut se situer à l'intérieur ou à l'extérieur de l'espace de travail et le troisième est de type architectural et est évité facilement lors du design.

Zlatanov, Fenton et Benhabib [52, 53] ont compilé et divisé les singularités d'un mécanisme général non redondant en 6 types et 21 classes à l'aide des équations de vitesse. Cette classification est plus complète que Gosselin et Angeles [28] et permet d'expliquer l'instabilité de la plate-forme du manipulateur 3-UPU construite à l'Université SNU à Séoul [38, 39].

Des auteurs obtiennent les expressions analytiques des lieux de singularité de manipulateurs et étudient le comportement des surfaces et des courbes obtenues en fonction de l'architecture choisie ou en fonction d'une variable, telle l'orientation, maintenue constante. Les courbes des singularités sont aussi superposées sur l'espace de travail [15–17, 24, 31, 54]. Dans ces travaux, les singularités sont obtenues à partir de l'équation du déterminant de la Jacobienne.

Sen et Mruthyunjaya [18] caractérisent les singularités à l'intérieur de l'espace de travail des manipulateurs ayant des structures cinématiques arbitraires en termes des centres instantanés de rotation associés aux chaînes cinématiques. Ils identifient cinq types de singularité. Les résultats s'appliquent à différents types de manipulateurs plans, sériels, parallèles et hybrides. Étant donné la dualité vitesses-torseur, les singularités peuvent être obtenues à partir des torseurs d'effort. Les configurations singulières de la plate-forme de Stewart ont été obtenues de cette façon [55, 56].

Certains proposent des mesures de la proximité des singularités. Voglewede et Ebert-Uphoff [57] présentent et comparent quelques mesures de la proximité des singularités. La méthode privilégiée est basée sur la fréquence naturelle d'oscillation, fonction de la raideur du manipulateur et de son inertie. Lorsque la fréquence naturelle a une valeur nulle, le manipulateur est en configuration singulière. Pour les manipulateurs parallèles plans à 3 DDL, Husty, Hayes et Loibnegger [58] déterminent géométriquement la plus courte translation et la plus courte rotation dans l'espace projectif à partir d'un point choisi. Les singularités, qui sont des surfaces quadratiques, sont obtenues dans l'espace projectif et exprimées à partir des coordonnées homogènes.

Pour éviter les configurations singulières, des travaux portent sur la planification

de la trajectoire [56, 59], sur un actionnement redondant [4, 60–62] et aussi sur l’ajout de systèmes de freinage aux articulations passives [63]. Certaines architectures ont la possibilité de passer d’une solution à une autre en évitant toute singularité [64]. D’autres travaux portent sur la synthèse de manipulateurs parallèles n’ayant pas de singularités à l’intérieur de leur espace de travail [11, 14].

2.3.2 Dextérité et précision

La dextérité est une des propriétés à considérer lors de l’optimisation cinématique [65]. Elle est donc considérée lors de la synthèse de manipulateurs [11, 14, 27, 66, 67, 67–71].

Pour certains auteurs, la recherche de l’espace de travail dextre est importante et la dextérité locale est définie selon le mouvement total possible de l’organe terminal [9, 72]. Klein et Blaho [6] présentent et comparent quatre mesures locales de dextérité basées sur le déterminant de la matrice jacobienne, le conditionnement de la matrice jacobienne, la valeur singulière la plus faible et l’étendue disponible du mouvement des articulations. Les résultats sont différents selon la méthode choisie, mais les auteurs ne dévoilent pas leur préférence, disant que la méthode à choisir dépend de la tâche à effectuer.

Salisbury et Craig [73] proposent le conditionnement de la matrice jacobienne comme mesure de précision. Un conditionnement plus faible indique une précision supérieure et un conditionnement unitaire indique une configuration isotrope (parfaitement conditionnée). Gosselin et Angeles [74] définissent un indice local et un indice global de dextérité basé sur le conditionnement de la matrice jacobienne du manipulateur. L’indice local est une mesure de la dextérité à une posture choisie du manipulateur, alors que l’indice global représente la dextérité du manipulateur sur tout son espace de travail. Ces indices sont applicables autant aux architectures sérielles que parallèles. Le conditionnement de la matrice jacobienne est la mesure de dextérité la plus répandue, pour l’analyse ou la synthèse de manipulateurs [11, 14, 27, 66–71, 74–82].

Lorsque les unités de la matrice jacobienne ne sont pas homogènes (les équations de vitesses comprennent la position et l’orientation), le conditionnement d’un manipulateur n’est plus le même si on effectue un changement d’échelle [83]. L’auteur présente

une méthode qui permet d'obtenir une matrice jacobienne ayant des unités homogènes, à l'aide d'une redondance des équations de cinématique. La vitesse dans le plan est représenté par la vitesse de deux points sur le dernier membre (ou sur la plate-forme mobile) afin d'éliminer la vitesse de rotation dans les équations. La vitesse cartésienne est alors définie par quatre composantes au lieu de trois. De la même façon, la vitesse de l'organe terminal d'un manipulateur spatial à 6 DDL peut être exprimée à l'aide de la vitesse de trois points, pour un total de 9 composantes au lieu de 6. Le même auteur montre aussi comment éliminer la redondance sans perdre l'avantage d'un conditionnement invariable.

Kim [80, 84] utilise la redondance dans ses équations de vitesse en choisissant trois points sur la plate-forme mobile dans le cas des manipulateurs à trois DDL et de ceux à six DDL. D'après les auteurs, il existe une façon optimale de choisir ces trois points : le triangle formé devrait être équilatéral, avoir le même ordre de grandeur et le même centre géométrique que la plate-forme mobile. Un choix optimal minimisera le conditionnement obtenu. Arsenault et Boudreau [11] comparent deux méthodes pour l'homogénéisation des unités de la matrice jacobienne : la division par une longueur caractéristique et celle définie par Kim. La dernière donne les meilleurs résultats et a été utilisée par les auteurs pour l'optimisation des propriétés cinématiques.

Dans le but de calculer la dextérité, Pond et Carretero [85] présentent une méthode qui diffère de [80, 83, 84] pour l'obtention d'une matrice jacobienne ayant des unités homogènes. La méthode permet d'obtenir une matrice jacobienne carrée si le nombre d'actionneurs est le même que le nombre de vitesses indépendantes à l'organe terminal, en multipliant la matrice obtenue dans [80] par une matrice des contraintes physiques afin d'éliminer la redondance. D'après les auteurs, le conditionnement de la jacobienne peut être utilisé pour mesurer la dextérité de manipulateurs ayant un seul type d'actionneur, et dont les DDL sont soit des rotations ou soit des déplacements dans l'espace Cartésien.

D'après Merlet [86], ni la manipulabilité ni le conditionnement de la matrice jacobienne sont des mesures adéquates de la précision d'un manipulateur parallèle, même si les unités des matrices jacobienues sont homogènes dès le départ. Les erreurs maximales de positionnement, les erreurs moyennes et leur variance sur l'ensemble de l'espace de travail est une meilleure représentation d'un indice global de précision.

Briot et Bonev [87] calculent l'erreur de position et d'orientation de trois manipulateurs parallèles plans à trois DDL en considérant l'erreur des articulations actionnées. Les auteurs proposent de remplacer les cartes de dextérité dans l'espace de travail par des cartes de l'erreur maximale en position et en orientation. La méthode développée est valide pour les manipulateurs présentés lorsqu'ils ne sont pas à proximité des singularités. De la même manière, Yu, Bonev et Zsombor-Murray [88] proposent de remplacer les cartes de dextérité par des cartes de l'erreur maximale. Avec la classe de manipulateurs parallèles plan choisis, il est possible d'obtenir par géométrie la valeur exacte des erreurs recherchées. Les espaces de travail ne contiennent pas de singularités.

2.3.3 Raideur et flexibilité

La flexibilité et la raideur des manipulateurs sont traitées de nombreuses façons. Certains considèrent la déformation des articulations [89,90], la raideur des articulations [7, 91, 92] ou les forces et moments requis aux articulations pour résister à un torseur appliqué à l'organe terminal [93]. Khasawneh et Ferreira [7] comparent les résultats obtenus par formulation mathématique avec ceux obtenus avec une analyse par éléments finis. La correspondance entre les deux est bonne.

D'autres vont étudier plus en détails les déformations de la structure dues à la torsion, à la compression et/ou à la flexion [94,95] ou la raideur de la structure [96]. Une autre approche est la modélisation des déformations de la structure, en considérant des membres parfaitement rigides et une raideur modifiée des articulations, afin d'obtenir des déplacements équivalents lorsqu'un torseur est appliqué à l'organe terminal [97,98].

Les travaux de Simaan et Shoham [99, 100] ont un objectif différent. Les auteurs font la synthèse d'une raideur souhaitée à une posture choisie à partir de manipulateurs parallèles à géométrie variable. Un polynôme en fonction des paramètres variables est obtenu à partir de la matrice des raideurs.

Une méthode de calcul de la raideur d'un manipulateur parallèle dans l'espace cartésien, basée sur la matrice jacobienne du manipulateur et la raideur de ses articulations, a été présentée par Gosselin [91]. Ceci permet la superposition des cartes de raideur sur l'espace de travail d'un manipulateur. La transformation de la rai-

deur articulaire en raideur cartésienne avec la matrice jacobienne est aussi retrouvée ailleurs [92, 97].

Cette méthode de Gosselin [91] a été adoptée par Zhang [98] dans ses travaux d'optimisation d'architectures parallèles et hybrides utilisées comme machines-outils. Dans son modèle, la flexibilité des membrures et des articulations actionnées est remplacée par une seule flexibilité équivalente à l'articulation. Les déplacements du bout d'une membrure dus à sa flexibilité et ceux dus aux ressorts dans les articulations sont les mêmes.

L'expression de la raideur dans l'espace cartésien à partir de la jacobienne et des raideurs aux articulations a été apportée plus loin en tenant compte des déformations causées par un torseur à l'organe terminal [101–103]. Les raideurs calculées ainsi que les couples requis aux articulations lors d'un déplacement sont plus représentatifs de la réalité.

2.4 Ouvrages les plus pertinents

Le jeu aux articulations passives et les déformations des membrures et des articulations sous l'action d'un torseur sont les sources d'imprécision considérées dans cette thèse. La modélisation choisie pour le jeu est celle de Voglewede et Ebert-Uphoff [34] où la longueur d'une membrure varie selon la grandeur du jeu présent à ses articulations passives rotoïdes. Dans le cas des deux manipulateurs ayant des chaînes \underline{SPS} et des articulations passives sphériques avec jeu, la variation de la longueur des pattes sera modélisé de la même façon, tel que dans Lallemand, Goudali et Zeghloul [19].

Quatre des manipulateurs étudiés ont des actionneurs prismatiques et des membrures soumises à des contraintes de tension/compression. Afin de calculer leur raideur dans l'espace cartésien, la méthode proposée par Gosselin [91] est utilisée, où la raideur individuelle des pattes (espace articulaire) est transformée dans l'espace cartésien à l'aide de la matrice jacobienne.

Deux des manipulateurs étudiés ont des actionneurs rotoïdes et des membrures soumises à des contraintes de flexion. Afin de tenir compte de la flexibilité aux articulations

rotoïdes et de la flexion des membrures, l'approche de Zhang [98] est adoptée où les deux flexibilités (articulation et membrure) sont combinées pour obtenir une flexibilité équivalente à l'articulation.

Sous l'action d'un torseur, tout manipulateur subira des déformations, ce qui modifiera les raideurs calculées avec les méthodes présentées précédemment. Chen et Kao [101] ont présenté une matrice de raideur qui tient compte des déformations causées par un torseur. L'idée, mais pas la méthode est adoptée dans cette thèse. C'est la diminution possible de la raideur qui sera calculée, étant donné des déformations maximales approximatives prévues.

Le mouvement possible des manipulateurs, dû au jeu des articulations passives et de la flexibilité des membrures et des articulations actionnées, sera compris dans un espace d'incertitude. Sauf dans le cas où des membrures sont soumises à de la flexion, les espaces d'incertitude sont obtenus exactement de la même façon que les espaces de travail.

L'obtention de l'espace à orientation constante est utile dans les travaux de cette thèse, dans le cas des manipulateurs plans à 3 DDL. L'obtention de l'espace à torsion constante est utile dans le cas du manipulateur sphérique et l'espace à élévation constante dans le cas du tripode. L'algorithme de Gosselin [10] est donc utile pour tous les manipulateurs étudiés sauf le sphérique. Pour ceux-ci, toutes les frontières de l'espace de travail sont composées d'arcs de cercle. L'algorithme est modifié pour inclure l'effet de la flexion dans l'obtention de l'espace d'incertitude du 2-RRR et du 3-RRR. Dans le cas du manipulateur sphérique, la représentation choisie, pour son interprétation simple et unique, est la convention ZYZ d'Euler modifiée, présentée par Bonev et Ryu [29].

Pour toute étude des singularités d'un manipulateur, il faut considérer la classification complète fournie par Zlatanov, Fenton et Benhabib [53]. Dans le cas des manipulateurs étudiés dans cette thèse, toutes les singularités possibles sont comprises par la classification de Gosselin et Angeles [28], qui nécessite seulement les matrices jacobiennes reliant les vitesses des articulations actionnées à celles de l'organe terminal. Puisque les manipulateurs étudiés sont connus, les équations des singularités des manipulateurs avec actionneurs prismatiques ont déjà été obtenues [16, 24, 31].

Dans la plupart des ouvrages, la mesure de la dextérité retrouvée est celle définie par le conditionnement de la matrice jacobienne, proposé par Salisbury et Craig [73]. Récemment, Merlet [86] a rejeté cette mesure de précision (et d'autres) pour tous les manipulateurs parallèles. D'autres [85, 87, 88] disent que le conditionnement est une mesure adéquate si les DDL de l'organe terminal sont soit tous des déplacements ou soit tous des rotations. Cette thèse comprendra une comparaison de la précision et de la dextérité.

Le calcul de la précision sera effectuée à partir de l'espace d'incertitude. Le calcul de la dextérité se fera à partir du conditionnement de la jacobienne. Par contre, dans les deux cas où les matrices jacobiennes n'ont pas des unités homogènes (3-RPR et 3-RRR plans), une transformation sera effectuée. La méthode proposée par Kim et Ryu [80] sera utilisée.

Chapitre 3

Géométrie, espace de travail et propriétés cinématiques

Ce chapitre présente premièrement la géométrie et les solutions au problème géométrique inverse (PGI) de manipulateurs connus. Les méthodes d'obtention de l'espace de travail utilisées et la définition des propriétés cinématiques utiles pour cette thèse sont ensuite présentées. Bien que ce chapitre ne contiennent pas de nouveautés dans le domaine, l'information va faciliter la compréhension de la thèse.

Un total de six manipulateurs parallèles d'architectures différentes sont étudiés dans le cadre de ces travaux. Ce chapitre présente premièrement la géométrie de chacun : le type de chaînes cinématiques reliant une plate-forme mobile à une base fixe, les entrées (actionneurs, ou coordonnées articulaires) et les sorties (position et/ou orientation de l'organe terminal, qui sont les coordonnées cartésiennes). Ensuite, la solution

au PGI, la détermination de l'espace de travail et l'obtention des équations de vitesse sont présentées. À la fin, les méthodes de calcul de la dextérité et de la raideur sont présentées.

La solution au PGI consiste à exprimer l'entrée en fonction de la sortie, donc l'angle ou la longueur de chaque actionneur, selon son type (rotoïde ou prismatique), en fonction de la position et/ou de l'orientation de l'organe terminal. À partir des équations obtenues lors de la solution au problème géométrique inverse (PGI) d'un manipulateur, on peut tracer les limites de son espace de travail. De plus, on peut arriver à développer des équations pour exprimer et quantifier certaines caractéristiques recherchées, telles que la dextérité et la raideur.

L'espace de travail d'un manipulateur est l'espace pouvant être atteint par le point de référence sur l'organe terminal (un point choisi du manipulateur, sur une plate-forme mobile). Il est déterminé par les limites du mouvement permis par les articulations actionnées. Dans ce travail, on ne considère pas les limites des articulations passives ni les interférences mécaniques. La section 3.2 présente les méthodes et algorithmes de détermination de l'espace de travail de chacun des manipulateurs, à partir des solutions au PGI obtenues. C'est à partir de la dérivée des équations des solutions obtenues au PGI que les propriétés cinématiques sont déterminées ou calculées.

3.1 Géométrie et problème géométrique inverse

Un total de quatre manipulateurs avec actionneurs prismatiques sont étudiés : deux manipulateurs plans, le premier à deux DDL et le deuxième à trois DDL, un manipulateur spatial à trois DDL et un manipulateur sphérique à trois DDL. Deux manipulateurs plans avec actionneurs rotoïdes sont également étudiés : un à deux DDL et l'autre à trois DDL.

La différence majeure entre ces derniers manipulateurs et ceux avec actionneurs prismatiques est le nombre de solutions au PGI. Les manipulateurs avec des chaînes cinématiques du type \underline{RPR} ou \underline{SPS} comportent une seule solution au PGI, tandis que ceux avec des chaînes du type \underline{RRR} en ont plusieurs.

3.1.1 Manipulateur RPR plan à deux DDL

Ce manipulateur est montré à la figure 3.1. L'organe terminal est placé à l'intersection des deux pattes et se déplace dans le plan xy . Les pattes sont fixées à la base au bout des vecteurs \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 . Le vecteur entrée est $\boldsymbol{\rho} = [\rho_1 \quad \rho_2]^T$ où ρ_i désigne l'allongement de la patte i , $i = 1, 2$ et le vecteur sortie est $\mathbf{p} = [x \quad y]^T$.

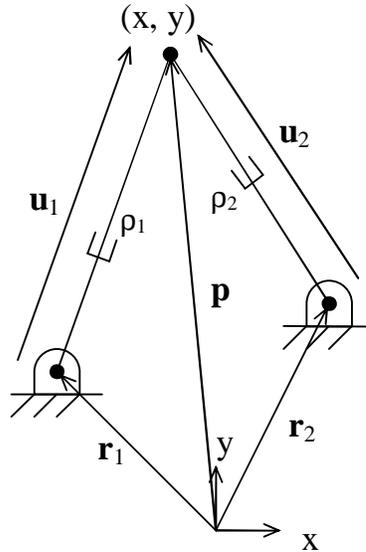


FIG. 3.1 – Manipulateur RPR plan à deux DDL.

En exprimant les coordonnées articulaires en fonction des coordonnées cartésiennes et de l'architecture, on obtient la solution au PGI.

$$\rho_i^2 = \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.1)$$

Avec

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{p} - \mathbf{r}_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.2)$$

on obtient

$$\rho_i^2 = [\mathbf{p} - \mathbf{r}_i]^T [\mathbf{p} - \mathbf{r}_i], \quad i = 1, 2. \quad (3.3)$$

3.1.2 Manipulateur spatial SPS à trois DDL

Ce manipulateur est montré à la figure 3.2. L'organe terminal est placé à l'intersection des trois pattes et se déplace dans l'espace 3D xyz . Les pattes sont fixées à la base

au bout des vecteurs \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 et \mathbf{r}_3 . Les coordonnées articulaires sont $\boldsymbol{\rho} = [\rho_1 \ \rho_2 \ \rho_3]^T$ et les coordonnées cartésiennes sont $\mathbf{p} = [x \ y \ z]^T$.

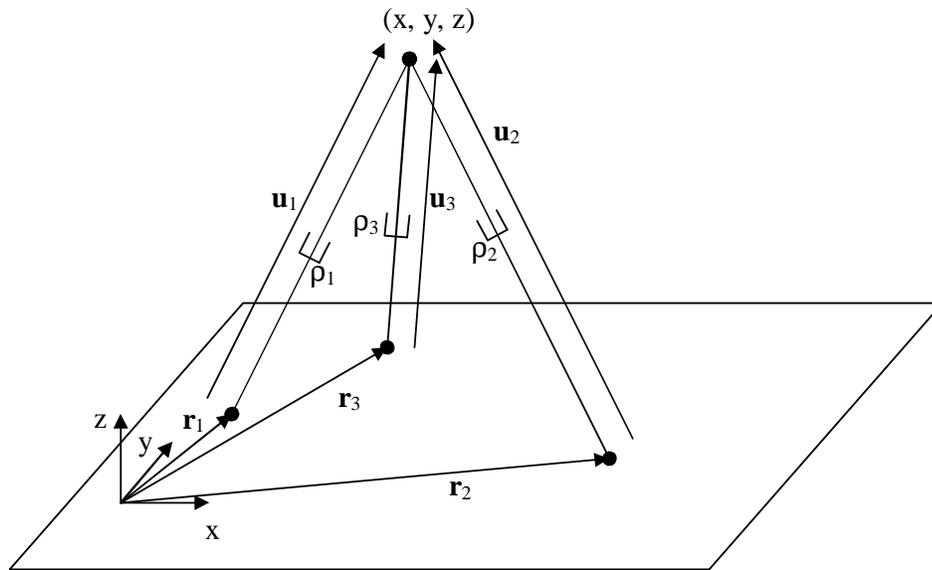


FIG. 3.2 – Manipulateur SPS spatial à 3 DDL.

La solution du PGI est donc :

$$\rho_i^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{r}_i)^T (\mathbf{p} - \mathbf{r}_i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.4)$$

3.1.3 Manipulateur RPR plan à trois DDL

Ce manipulateur est montré à la figure 3.3. La base fixe du manipulateur est le triangle décrit par les vecteurs \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 et \mathbf{r}_3 dans le repère fixe Oxy . La géométrie de la plate-forme mobile est un triangle décrit par les vecteurs \mathbf{s}_{10} , \mathbf{s}_{20} et \mathbf{s}_{30} exprimés par rapport au repère mobile $O'x'y'$, qui sont notés \mathbf{s}_1 , \mathbf{s}_2 et \mathbf{s}_3 s'ils sont exprimés par rapport au repère fixe. Le repère mobile est attaché à la plate-forme mobile. Le point de référence de l'organe terminal est placé à l'origine du repère mobile et se déplace dans le plan xy avec une orientation ϕ variable. L'angle ϕ est celui du repère mobile par rapport au repère fixe. Les coordonnées cartésiennes (sorties) sont : $\mathbf{c} = [x \ y \ \phi]^T$.

La base et la plate-forme mobile sont reliées par trois chaînes cinématiques RPR où les articulations prismatiques de coordonnées ρ_1 , ρ_2 et ρ_3 sont actionnées (coordonnées articulaires). La longueur de ces articulations est la norme des vecteurs \mathbf{u}_i , $i = 1, 2, 3$,

représentés dans la figure 3.3 :

$$\rho_i^2 = \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.5)$$

On peut exprimer la sortie du manipulateur avec un vecteur position $\mathbf{p} = [x, y]^T$ et une matrice de rotation d'un angle ϕ autour de l'axe z . La matrice de rotation est alors :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

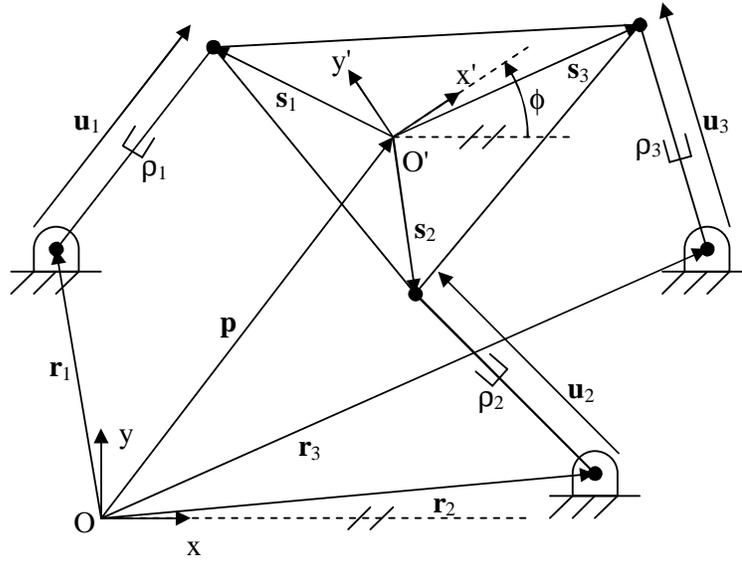


FIG. 3.3 – Manipulateur RPR plan à 3 DDL.

Pour chacune des trois pattes du manipulateur, on peut écrire :

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{p} + \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.7)$$

La solution du PGI est obtenue en substituant l'équation (3.7) dans l'équation (3.5) :

$$\rho_i^2 = (\mathbf{p} + \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i)^T (\mathbf{p} + \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.8)$$

où :

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{Q} \mathbf{s}_{i0}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.9)$$

et où les vecteurs \mathbf{s}_{i0} sont connus (données géométriques de la plate-forme mobile).

3.1.4 Manipulateur sphérique SPS à trois DDL

Ce manipulateur est montré à la figure 3.4. Les coordonnées articulaires (entrées) sont : $\boldsymbol{\rho} = [\rho_1 \ \rho_2 \ \rho_3]^T$ et les coordonnées cartésiennes (sorties) sont $[\phi \ \theta \ \sigma]^T$. L'angle σ , appelé la torsion, est la rotation autour de l'axe z du système fixe de coordonnées (repère fixe), avant que l'inclinaison soit effectuée. Les angles ϕ et θ définissent ensemble l'inclinaison. L'angle θ est celui qui indique la grandeur de l'inclinaison ; on le retrouve entre les axes z du repère fixe et z' du repère mobile. L'angle ϕ indique où l'inclinaison aura lieu. La projection de l'axe mobile z' sur le plan xy (fixe) forme un angle ϕ avec l'axe x du repère fixe. Les repères sont définis en plus de détails dans la description de la géométrie du manipulateur qui suit.

La géométrie de la base fixe est donnée par les vecteurs \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 et \mathbf{r}_3 . Ces derniers sont exprimés dans le système fixe de coordonnées $Oxyz$.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= [r_{1x}, r_{1y}, r_{1z}]^T \\ \mathbf{r}_2 &= [r_{2x}, r_{2y}, r_{2z}]^T \\ \mathbf{r}_3 &= [r_{3x}, r_{3y}, r_{3z}]^T \end{aligned} \quad (3.10)$$

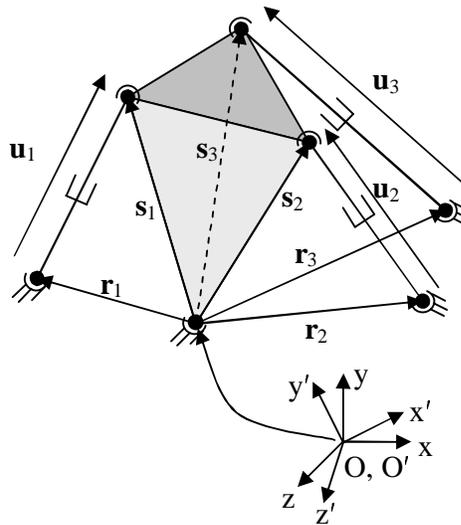


FIG. 3.4 – Manipulateur SPS sphérique à 3 DDL.

Le système de coordonnées mobile $O'x'y'z'$ est attaché à la plate-forme mobile et son origine se trouve au centre de rotation. La plate-forme mobile est limitée à une

rotation autour de ce point, où se trouve une articulation sphérique. La géométrie de la plate-forme mobile est donnée par les vecteurs \mathbf{s}_{10} , \mathbf{s}_{20} et \mathbf{s}_{30} exprimés dans le repère mobile :

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_{10} &= [s_{10x}, s_{10y}, s_{10z}]^T \\ \mathbf{s}_{20} &= [s_{20x}, s_{20y}, s_{20z}]^T \\ \mathbf{s}_{30} &= [s_{30x}, s_{30y}, s_{30z}]^T.\end{aligned}\tag{3.11}$$

La base et la plate-forme mobile sont reliées par trois chaînes cinématiques du type SPS. La longueur des articulations prismatiques est donnée par :

$$\rho_i^2 = \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2, 3.\tag{3.12}$$

La convention utilisée pour décrire l'orientation dans l'espace cartésien est celle décrite dans Bonev et Ryu [29], nommée *Tilt and Torsion*, *TT* qui sera appelée *inclinaison et torsion*, *IT* dans ce texte. Ces angles se comparent à ceux obtenus à partir de la convention *ZYZ* (*precession-nutation-spin*) d'Euler, mais comportent des changements importants. Selon la convention d'Euler, la matrice de rotation \mathbf{R} peut être décomposée en trois matrices de rotation $\mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_z(\psi)$. Deux rotations seulement constituent la matrice de rotation *IT* : $\mathbf{R} = \mathbf{R}_a(\theta)\mathbf{R}_z(\sigma)$. La première des rotations est montrée à la figure 3.5. Dans la figure, toutes les lignes en trait continu se trouvent dans un même plan, sauf z et z' . L'inclinaison θ est l'angle entre les axes z et z' qui est la rotation du système $x'y'z'$ autour de l'axe a . L'angle ϕ indique l'orientation de a dans le plan xy , la direction dans laquelle se produira l'inclinaison. Le terme utilisé pour désigner l'orientation de a est l'*azimuth*. La deuxième et dernière rotation est effectuée autour de l'axe z' et correspond à l'angle de torsion σ .

La matrice de rotation $\mathbf{R}_a(\theta)$ peut être décomposée en 2 rotations autour de y et de z , respectivement :

$$\mathbf{R}_a(\theta) = \mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_z(-\phi).\tag{3.13}$$

La multiplication de ces matrices donne :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_z(-\phi)\mathbf{R}_z(\sigma) = \mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_z(\sigma - \phi),\tag{3.14}$$

donc :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi \cos\theta \cos_{\sigma-\phi} - \sin\phi \sin_{\sigma-\phi} & -\cos\phi \cos\theta \sin_{\sigma-\phi} - \sin\phi \cos_{\sigma-\phi} & \cos\phi \sin\theta \\ \sin\phi \cos\theta \cos_{\sigma-\phi} + \cos\phi \sin_{\sigma-\phi} & -\sin\phi \cos\theta \sin_{\sigma-\phi} + \cos\phi \cos_{\sigma-\phi} & \sin\phi \sin\theta \\ -\sin\theta \cos_{\sigma-\phi} & \sin\theta \sin_{\sigma-\phi} & \cos\theta \end{bmatrix}.\tag{3.15}$$

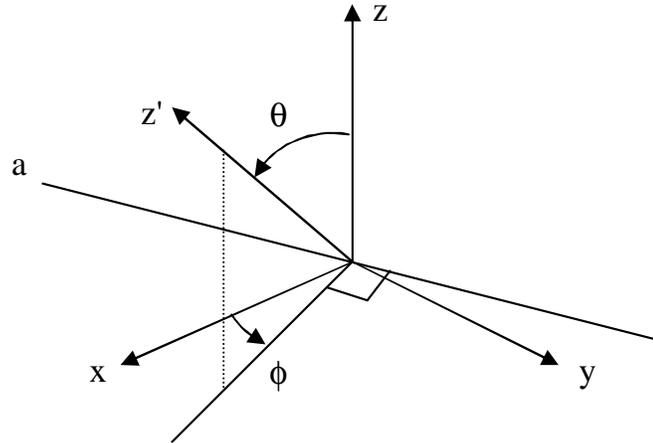


FIG. 3.5 – Angles qui définissent l'inclinaison.

Dans la dernière matrice ci-dessus, les angles IT (ϕ, θ, σ) sont équivalents aux angles d'Euler de la convention ZYZ $(\phi, \theta, \sigma - \phi)$. Les valeurs possibles des angles IT sont compris dans les intervalles suivants :

$$\begin{aligned} \phi(\text{azimuth}) &\in (0^\circ, 360^\circ] \\ \theta(\text{inclinaison}) &\in [0, +180^\circ) \\ \sigma(\text{torsion}) &\in (-180^\circ, +180^\circ]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

La matrice de rotation de l'équation (3.15) est utilisée pour ramener les vecteurs \mathbf{s}_{i0} , $i = 1, 2, 3$, qui sont exprimés dans un repère mobile $O'x'y'z'$, dans le repère fixe :

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{R}\mathbf{s}_{i0}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.17)$$

Le PGI peut être résolu puisque tous les vecteurs impliqués sont maintenant exprimés dans le même repère. On substitue

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{R}\mathbf{s}_{i0} - \mathbf{r}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.18)$$

dans l'équation (3.12) pour obtenir

$$\rho_i^2 = [\mathbf{R}\mathbf{s}_{i0} - \mathbf{r}_i]^T [\mathbf{R}\mathbf{s}_{i0} - \mathbf{r}_i]. \quad (3.19)$$

3.1.5 Manipulateur RRR plan à deux DDL

Ce manipulateur est montré à la figure 3.6. Les articulations actionnées sont celles se trouvant à la base, au bout des vecteurs \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 . Les entrées sont donc θ_1 et θ_2 ,

montrées dans la figure 3.6. Les autres articulations rotoïdes sont passives. L'organe terminal est placé au bout des deux chaînes cinématiques et se déplace dans le plan xy . Les quatre membrures ont des longueurs fixes : l_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Les vecteurs \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 sont de longueurs l_1 et l_2 , respectivement, et sont orientés selon les membrures proximales des deux chaînes cinématiques. Les vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont de longueurs l_3 et l_4 , respectivement et sont orientés selon les membrures distales des chaînes cinématiques. Le vecteur \mathbf{p} est la position de l'organe terminal par rapport au système d'axes fixe.

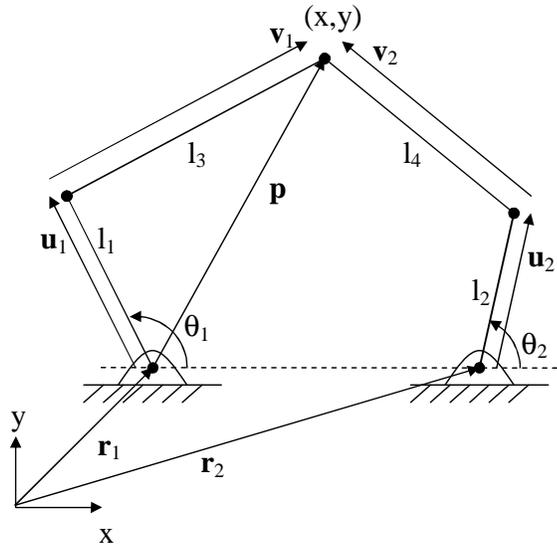


FIG. 3.6 – Manipulateur plan $2\underline{R}2\underline{R}$ à deux DDL.

On obtient le PGI en trouvant une expression qui relie l'entrée $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2]^T$ et la sortie $\mathbf{p} = [x \ y]^T$. On commence par la première chaîne cinématique avec :

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 \quad (3.20)$$

où

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 \\ l_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

on peut écrire

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{p} - \mathbf{r}_1 - \mathbf{u}_1 \quad \text{et} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 = l_3^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{r}_1 - \mathbf{u}_1)^T (\mathbf{p} - \mathbf{r}_1 - \mathbf{u}_1). \quad (3.23)$$

En développant la dernière équation et en y substituant

$$\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 = l_1^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_1 = \mathbf{p} - \mathbf{r}_1 \quad (3.24)$$

on obtient :

$$2\mathbf{w}_1^T \mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1^T \mathbf{w}_1 + l_1^2 - l_3^2 \quad (3.25)$$

qu'on peut exprimer sous la forme :

$$A \cos \theta_1 + B \sin \theta_1 + C = 0 \quad (3.26)$$

avec :

$$A = 2\mathbf{w}_1^T \mathbf{e}_1 l_1 \quad (3.27)$$

$$B = 2\mathbf{w}_1^T \mathbf{e}_2 l_1 \quad (3.28)$$

$$C = l_3^2 - l_1^2 - \mathbf{w}_1^T \mathbf{w}_1 \quad (3.29)$$

où :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Afin d'isoler la variable recherchée, θ_1 , on doit utiliser la tangente de la moitié de l'angle :

$$T_1 = \tan \left(\frac{\theta_1}{2} \right) \quad (3.31)$$

afin de faire les substitutions nécessaires dans l'équation (3.26). Cette équation deviendra alors une équation quadratique facile à solutionner et donnera deux solutions pour θ_1 . On remplace $\sin \theta_1$ et $\cos \theta_1$ par les identités ci-dessous pour obtenir le polynôme de l'équation (3.33) d'où les solutions pour θ_1 sont obtenues.

$$\cos \theta_1 = \frac{1 - T_1^2}{1 + T_1^2}, \quad \sin \theta_1 = \frac{2T_1}{1 + T_1^2} \quad (3.32)$$

$$(C - A)T_1^2 + 2BT_1 + (C + A) = 0 \quad (3.33)$$

La même procédure est répétée pour la deuxième chaîne cinématique.

On commence en exprimant le vecteur \mathbf{p} en passant par le deuxième chemin possible :

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2 \quad (3.34)$$

où

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_2 \\ l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

on peut écrire

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{p} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{u}_2 \quad \text{et} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 = l_4^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{u}_2)^T (\mathbf{p} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{u}_2). \quad (3.37)$$

En développant la dernière équation et en y substituant

$$\mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_2 = l_2^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{p} - \mathbf{r}_2 \quad (3.38)$$

on obtient :

$$2\mathbf{w}_2^T \mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_2^T \mathbf{w}_2 + l_2^2 - l_4^2 \quad (3.39)$$

qu'on peut exprimer sous la forme :

$$D \cos \theta_2 + E \sin \theta_2 + F = 0 \quad (3.40)$$

avec :

$$D = 2\mathbf{w}_2^T \mathbf{e}_1 l_2 \quad (3.41)$$

$$E = 2\mathbf{w}_2^T \mathbf{e}_2 l_2 \quad (3.42)$$

$$F = l_4^2 - l_2^2 - \mathbf{w}_2^T \mathbf{w}_2. \quad (3.43)$$

Cette fois avec θ_2 :

$$T_2 = \tan \left(\frac{\theta_2}{2} \right) \quad (3.44)$$

et

$$\cos \theta_2 = \frac{1 - T_2^2}{1 + T_2^2}, \quad \sin \theta_2 = \frac{2T_2}{1 + T_2^2} \quad (3.45)$$

et enfin :

$$(F - D)T_2^2 + 2ET_2 + (F + D) = 0 \quad (3.46)$$

qui est l'équation quadratique qui donnera les deux solutions possibles pour θ_2 .

Un total de quatre solutions (2^n , avec n =nombre de pattes) au PGI sont possibles $(\theta_{1a}\theta_{2a}, \theta_{1a}\theta_{2b}, \theta_{1b}\theta_{2a}, \theta_{1b}\theta_{2b})$ et celles-ci sont illustrées dans la figure 3.7.

3.1.6 Manipulateur RRR plan à trois DDL

Le manipulateur RRR plan à trois DDL est montré à la figure 3.8. Tel que dans le cas du manipulateur RPR plan à trois DDL, le point de référence sur l'organe terminal est placé sur un point quelconque choisi de la plate-forme mobile représentée

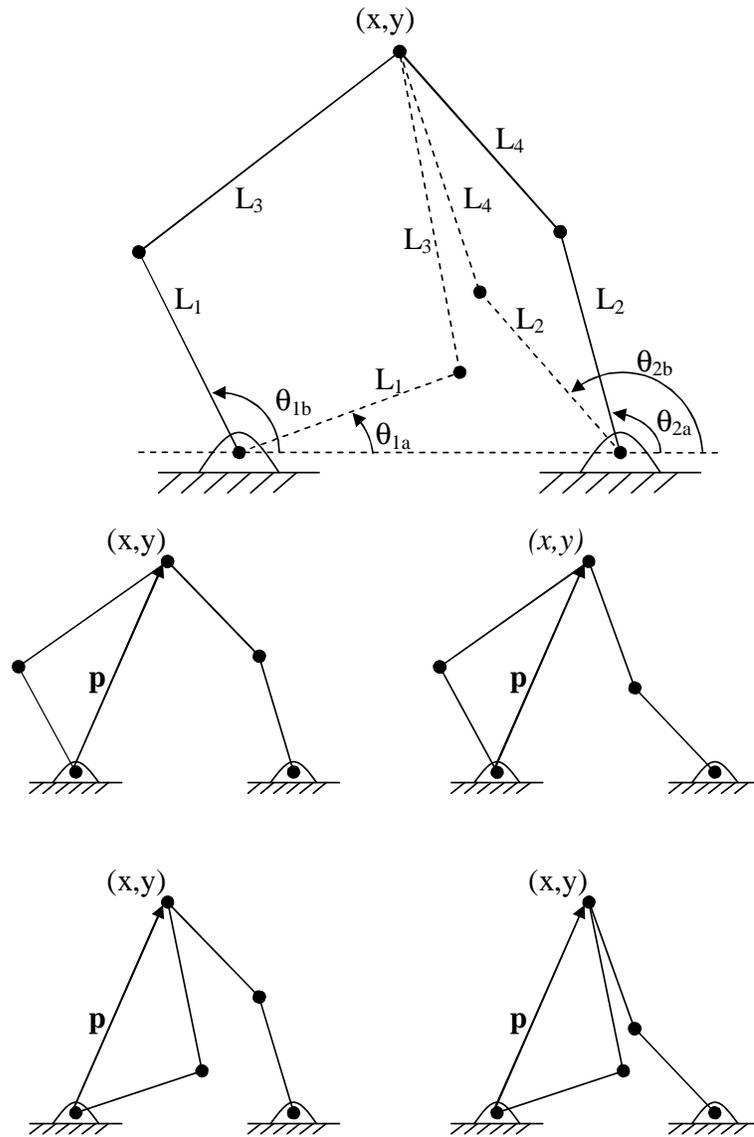


FIG. 3.7 – Manipulateur 2R2R plan à deux DDL et ses quatre solutions.

par un triangle et se déplace dans un plan xy avec une orientation ϕ . Les coordonnées cartésiennes sont donc : $\mathbf{c} = [\mathbf{p}^T \ \phi]^T$, où $\mathbf{p} = [x \ y]^T$. La géométrie de ce triangle est décrite par les vecteurs \mathbf{s}_{10} , \mathbf{s}_{20} et \mathbf{s}_{30} dans le repère mobile $O'x'y'$ fixé sur la plate-forme mobile. L'origine de ce repère correspond à la position de l'organe terminal, et l'angle ϕ entre ce repère mobile et le repère fixe Oxy est l'orientation de l'organe terminal. La matrice de rotation associée à ce manipulateur est la même que celle montrée à l'équation (3.6) et on effectue le changement de repères des vecteurs s_{i0} , $i = 1, 2, 3$ en pré-multipliant par la matrice \mathbf{Q} , tel que montré dans l'équation (3.9).

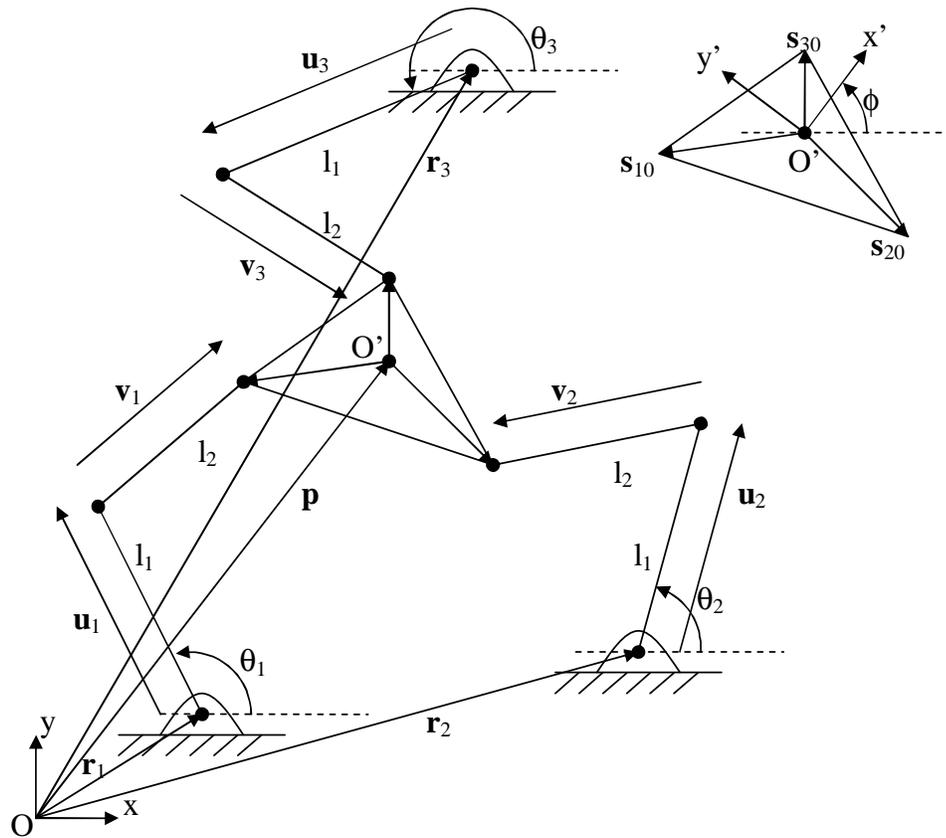


FIG. 3.8 – Manipulateur $\underline{3R}$ plan à trois DDL.

La base fixe du manipulateur est le triangle décrit par les vecteurs \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 et \mathbf{r}_3 dans le repère fixe Oxy . Les articulations actionnées sont celles se trouvant à la base, au bout des vecteurs \mathbf{r}_i , $i = 1, 2, 3$. Les coordonnées articulaires sont donc $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$, montrées dans la figure 3.8. Les autres articulations rotoïdes sont passives. Les trois chaînes cinématiques sont identiques et toutes les membrures ont des longueurs fixes. Les membrures proximales ont une longueur l_1 et les membrures distales ont une longueur l_2 . Les vecteurs \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 et \mathbf{u}_3 sont de longueur l_1 et ont des orientations θ_1 , θ_2 et θ_3 , respectivement. Les vecteurs \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 et \mathbf{v}_3 sont de longueur l_2 et sont orientés

selon les membrures distales des chaînes cinématiques. Le vecteur \mathbf{p} est la position de l'organe terminal.

La procédure utilisée pour obtenir le PGI ressemble à celle présentée dans la section précédente pour le manipulateur à deux DDL. Puisque les étapes sont les mêmes pour les trois chaînes cinématiques, le travail est montré une fois pour i , qui prendra les valeurs 1, 2 et 3. D'après la figure 3.8 :

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}_i + \mathbf{u}_i + \mathbf{v}_i - \mathbf{s}_i \quad (3.47)$$

où

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_i \\ l_1 \sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Pour éliminer le terme \mathbf{v}_i , on l'isole et on élève les deux côtés de l'équation au carré :

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{p} - \mathbf{r}_i - \mathbf{u}_i + \mathbf{s}_i \quad (3.49)$$

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = l_2^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{r}_i - \mathbf{u}_i + \mathbf{s}_i)^T (\mathbf{p} - \mathbf{r}_i - \mathbf{u}_i + \mathbf{s}_i) \quad (3.50)$$

En substituant

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i = l_1^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_i = \mathbf{p} - \mathbf{r}_i + \mathbf{s}_i \quad (3.51)$$

on obtient :

$$2\mathbf{w}_i^T \mathbf{u}_i = \mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i + l_1^2 - l_2^2 \quad (3.52)$$

qu'on peut exprimer sous la forme :

$$G \cos \theta_i + H \sin \theta_i + I = 0 \quad (3.53)$$

avec :

$$G = 2\mathbf{w}_i^T \mathbf{e}_1 l_1 \quad (3.54)$$

$$H = 2\mathbf{w}_i^T \mathbf{e}_2 l_1 \quad (3.55)$$

$$I = l_2^2 - l_1^2 - \mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i \quad (3.56)$$

où \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 sont les vecteurs de l'équation (3.30). Afin d'isoler la variable recherchée, θ_i , on doit utiliser la tangente de la moitié de l'angle :

$$T_i = \tan \left(\frac{\theta_i}{2} \right) \quad (3.57)$$

afin d'effectuer les substitutions nécessaires dans l'équation (3.53). Cette équation deviendra alors une équation quadratique de la même forme qu'à la section précédente (équations (3.26) et (3.40)) et donnera deux solutions pour θ_i .

$$(I - G)T_i^2 + 2HT_i + (I + G) = 0 \quad (3.58)$$

Un total de huit solutions (2^n , avec n = nombre de pattes) au PGI sont possibles, puisque chaque patte peut prendre deux configurations pour atteindre la même position et la même orientation de la plate-forme mobile. Ces solutions sont montrées à la figure 3.9.

3.2 Espace de travail

Dans la présentation des méthodes utilisées pour l'obtention de l'espace de travail, on peut regrouper les deux manipulateurs plans à 2 DDL, ensuite les deux manipulateurs plan à 3 DDL et le manipulateur spatial à 3DDL (tripode). Le manipulateur sphérique sera traité seul.

3.2.1 Manipulateurs plans à deux DDL

La solution au PGI du 2-RPR, équation (3.3), peut être réécrite pour prendre la forme de l'équation d'un cercle :

$$\rho_i^2 = (x - r_{ix})^2 + (y - r_{iy})^2 \quad i = 1, 2 \quad (3.59)$$

où r_{ix} et r_{iy} sont les composantes selon les axes x et y des vecteurs \mathbf{r}_i , $i = 1, 2$

L'espace de travail est limité par l'étendue du mouvement possible des articulations prismatiques, ρ_1 et ρ_2 . L'équation (3.59) avec $i = 1$ et $i = 2$ indique que l'espace de travail du 2-RPR est l'intersection de deux paires de cercles concentriques centrés au bout des vecteurs \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 , dont les rayons varient de $\rho_{i,min}$ à $\rho_{i,max}$, $i = 1, 2$. L'espace de travail du 2-RPR se trouve à la figure 3.10.

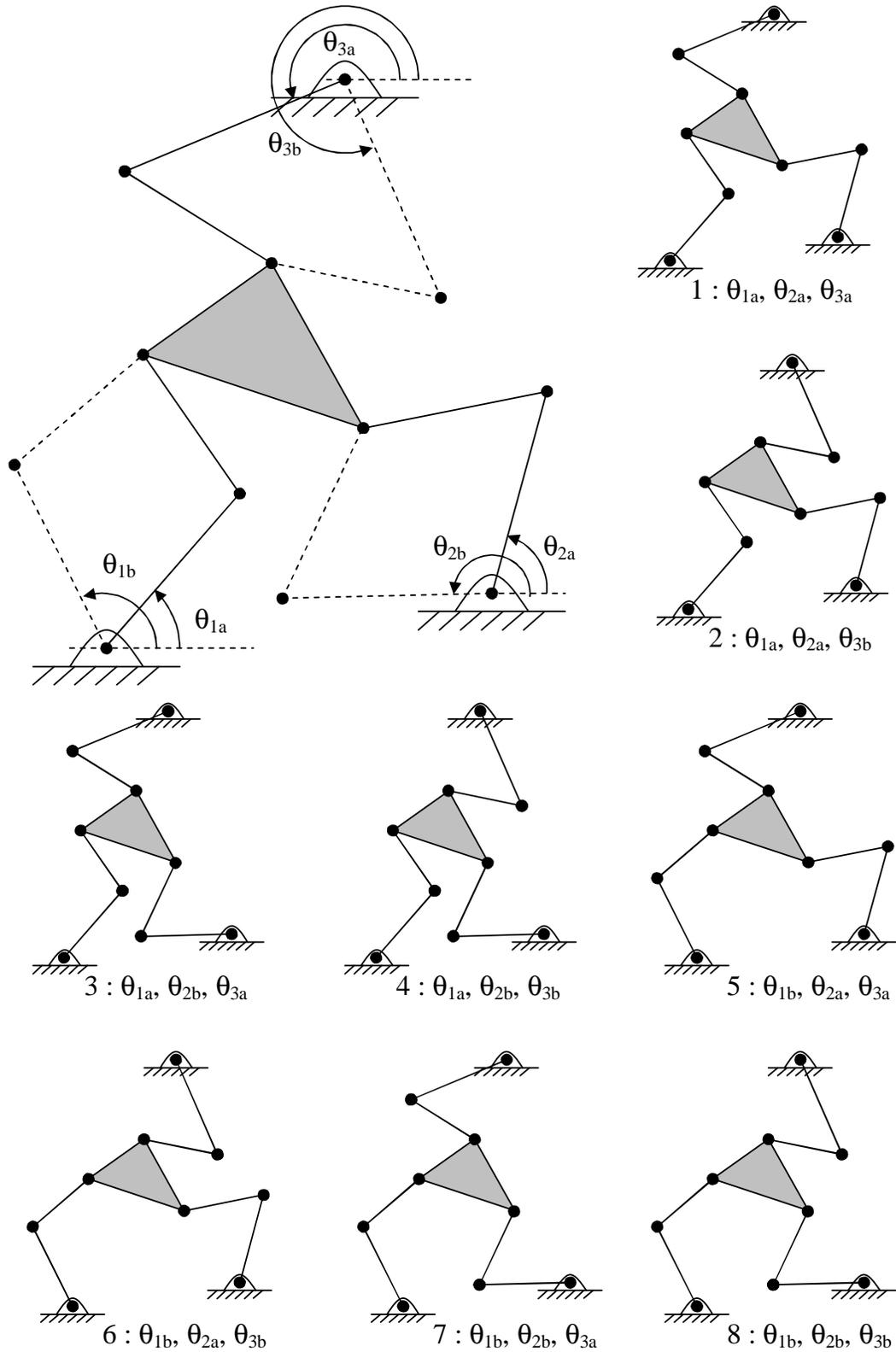


FIG. 3.9 – Les huit solutions au PGI du manipulateur plan à 3 DDL (3-RRR).

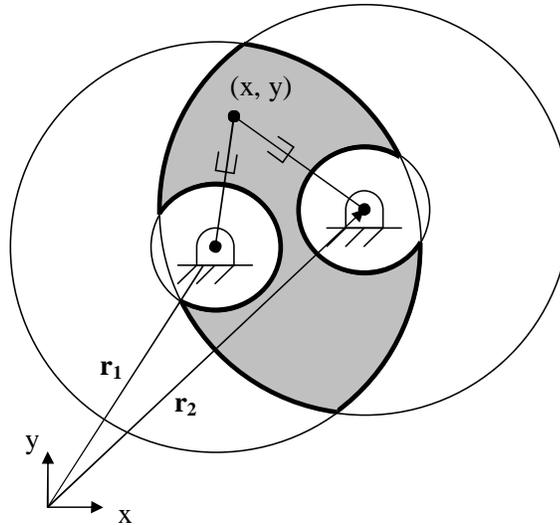


FIG. 3.10 – Espace de travail d'un manipulateur plan à 2 DDL du type \underline{RPR} .

L'espace de travail dépend des limites de chacune de ses chaînes cinématiques (ou pattes). C'est la même chose pour le $2\text{-}\underline{RRR}$. Les paires de cercles concentriques sont centrés au bout des vecteurs \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 . La limite de chacune des chaînes cinématiques correspond aux situations 1. *membrures alignées et repliées* et 2. *membrures alignées et dépliées* :

$$\begin{aligned} r_{min} &= |l_1 - l_3| \\ r_{max} &= |l_1 + l_3|, \end{aligned} \quad (3.60)$$

pour la patte se trouvant au bout du vecteur \mathbf{r}_1 . La figure 3.11 illustre ceci et la région ombragée correspond à l'espace atteignable d'une patte.

3.2.2 Manipulateurs plans à trois DDL et spatial à trois DDL

La solution au PGI du $3\text{-}\underline{RPR}$ se trouve à l'équation (3.8) :

$$\rho_i^2 = (\mathbf{p} + \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i)^T (\mathbf{p} + \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.61)$$

où

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{Q}\mathbf{s}_{i0}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.62)$$

L'espace de travail le plus commun pour les manipulateurs plans est celui à orientation constante, puisqu'il est plus facile à représenter. Les vecteurs $\mathbf{s}_i = \mathbf{Q}\mathbf{s}_{i0}$, $i = 1, 2, 3$

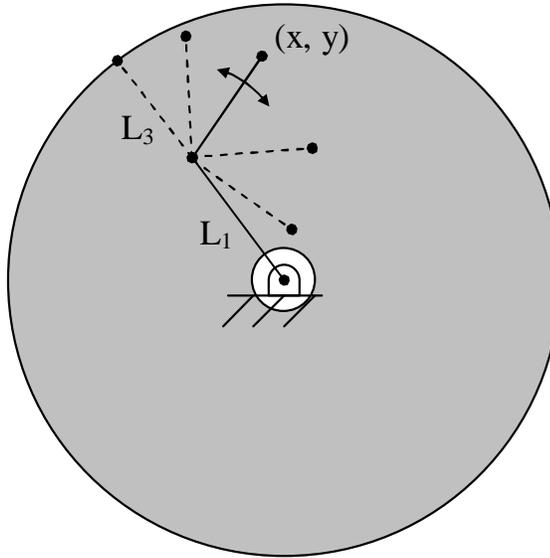


FIG. 3.11 – Espace atteignable d'une patte RRR.

sont alors des constantes qui représentent la position du point d'attache de la i^e patte sur la plate-forme mobile, par rapport à l'organe terminal, mais exprimé dans le repère fixe à la base du manipulateur.

Les équations précédentes peuvent être réécrites de la façon suivante :

$$\rho_i^2 = (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.63)$$

où :

$$\begin{aligned} a_i &= r_{ix} - s_{ix} \\ b_i &= r_{iy} - s_{iy} \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.64)$$

L'espace de travail à orientation constante du 3-RPR est l'intersection de trois régions annulaires, chacune formée par une paire de cercles concentriques, centrés au bout des vecteurs $\mathbf{r}_i - \mathbf{s}_i$. Les paires de cercles ont des rayons de $\rho_{i,min}$ et de $\rho_{i,max}$, pour $i = 1, 2, 3$.

Pour le 3-RRR, les équations des limites de l'espace de travail sont exactement les mêmes sauf pour la définition des rayons minimum et maximum. Ceux-ci sont définis de la même façon que dans le cas du 2-RRR :

$$\begin{aligned} r_{min} &= |L_1 - L_2| \\ r_{max} &= |L_1 + L_2|. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Dans le cas du tripode, si on remplace ρ_1 , ρ_2 et ρ_3 par leurs valeurs minimum et maximum dans les équations de la solution au PGI, on obtient trois paires de sphères concentriques centrées au bout des vecteurs \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 et \mathbf{r}_3 dans l'espace 3D. Comme dans le cas des manipulateurs précédents, les valeurs minimum et maximum des rayons des sphères prennent les valeurs minimum et maximum de ρ_i , soit $\rho_{i,min}$ et $\rho_{i,max}$, pour $i = 1, 2, 3$. La solution au PGI peut être écrite sous la forme :

$$\rho_i^2 = (x - r_{ix})^2 + (y - r_{iy})^2 + (z - r_{iz})^2 \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.66)$$

L'intersection des trois zones définies chacune par deux sphères concentriques est l'espace de travail du manipulateur. Pour une élévation z constante, l'espace de travail est l'intersection de trois paires de cercles concentriques, qu'on obtient également à partir des équations de la solution au PGI. Ces tranches de l'espace de travail, dans le plan xy , sont faciles à obtenir. Les cercles concentriques sont centrés au bout des vecteurs \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 et \mathbf{r}_3 (composantes x et y seulement). Les rayons minimum et maximum sont obtenus avec la racine carrée de $\rho_i^2 - (z - r_{iz})^2$ en y substituant les valeurs minimum et maximum de ρ_i , soit $\rho_{i,min}$ et $\rho_{i,max}$, pour $i = 1, 2, 3$.

La figure 3.12 montre le manipulateur dans son espace de travail pour $z \geq 0$ (le plan $z = 0$ coupe l'espace de travail en deux copies miroir l'une de l'autre).

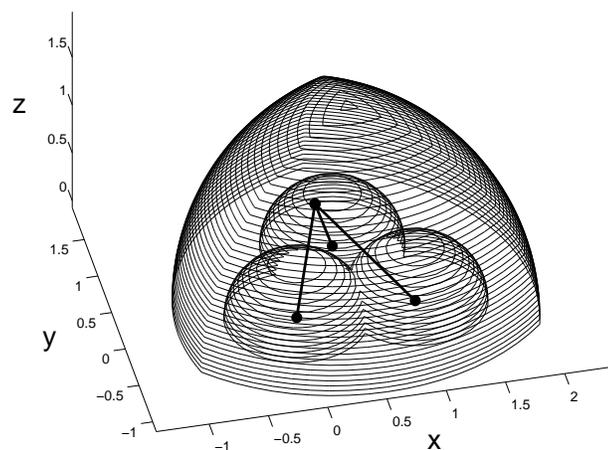


FIG. 3.12 – Manipulateur parallèle spatial à 3 DDL.

Dans tous les cas présentés précédemment, on retrouve des espaces de travail limités

par des arcs de cercle. Voici l'algorithme utilisé pour obtenir la liste des arcs (centre, rayon, angles de départ et d'arrivée) à partir des paires de cercles concentriques :

1. Pour chaque cercle, calculer la position angulaire de toutes ses intersections avec tous les autres cercles. S'il y a n intersections, le cercle est divisé en n arcs.
2. Pour chaque arc, vérifier s'il se trouve à l'intérieur de tous les grands cercles et à l'extérieur de tous les petits cercles des paires de cercles concentriques.
 - Dans l'affirmative, placer l'arc dans la liste des arcs qui forment l'espace de travail.

Pour obtenir l'espace de travail en trois dimensions (x, y, ϕ) , l'angle ϕ est incrémenté et l'espace 2D (xy) est déterminé. On s'arrête lorsqu'un espace de travail cesse d'exister (nombre d'arcs = 0).

3.2.3 Manipulateur sphérique à trois DDL

Étant donné les intervalles permis pour chacune des coordonnées cartésiennes, l'espace de travail au complet doit se trouver à l'intérieur de la zone cylindrique montrée dans la figure 3.13 [30]. Les équations du PGI sont non-linéaires et les frontières analytiques d'un espace de travail sont difficiles à obtenir. Dans les travaux mentionnés au chapitre 2 [23, 26, 27], les auteurs ont obtenu analytiquement les frontières de l'espace de travail. Aucun de ces travaux ne peut être appliqué directement au manipulateur sphérique présenté ici et l'obtention de frontières analytiques sort du cadre de cette thèse. Toutes les variables cartésiennes seront donc discrétisées afin d'obtenir un espace de travail, tel que trouvé dans [30]. Pour une valeur de σ (torsion) à la fois, un nuage de points (ϕ, θ) est obtenu, correspondant aux orientations atteignables du manipulateur.

Pour une architecture connue et une matrice de rotation connue (un point σ, ϕ, θ de l'espace cartésien), on peut calculer la longueur de chaque patte avec :

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}\mathbf{s}_{i0}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.67)$$

et :

$$\rho_i^2 = \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.68)$$

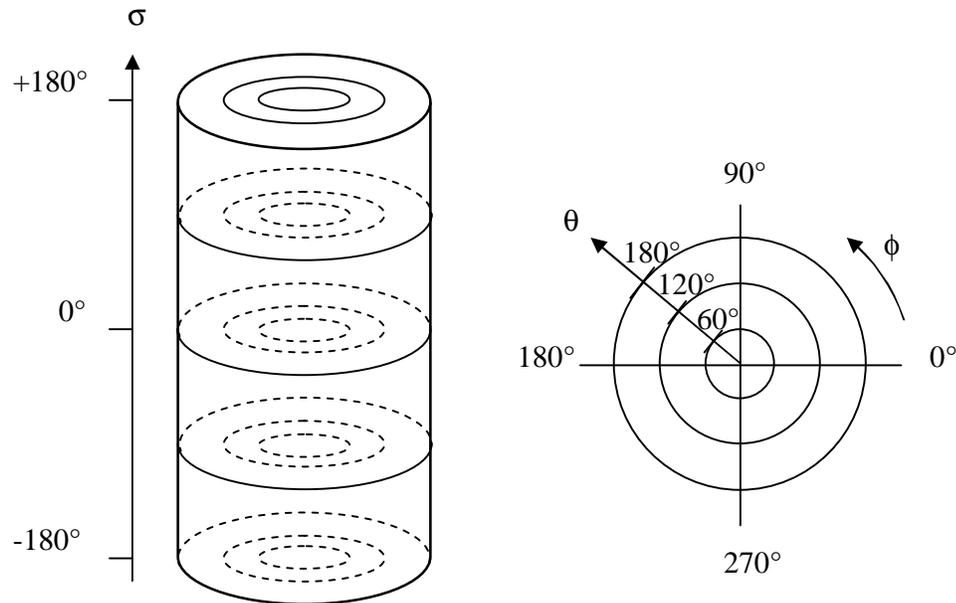


FIG. 3.13 – Limites de l'espace de travail sphérique représentée par un cylindre.

Si toutes les longueurs obtenues se trouvent à l'intérieur de l'intervalle permis pour chacune des pattes, le point (σ, ϕ, θ) fait partie de l'espace de travail. Pour obtenir l'espace de travail en trois dimensions, l'angle σ est incrémenté et l'espace 2D (ϕ, θ) est déterminé. On s'arrête lorsqu'un espace 2D est vide (aucun point enregistré) pour un angle σ .

3.3 Équations de vitesse et matrices jacobiennes

Dans le cas des manipulateurs parallèles, les équations de vitesse sont obtenues en dérivant les équations de la solution au PGI, alors que c'est le problème géométrique direct (PGD) qui est dérivé pour les manipulateurs sériels. Les équations de vitesse exprimées sous une forme matricielle, reliant les vitesses articulaires aux vitesses cartésiennes, peuvent rapidement donner de l'information importante telles que les configurations singulières des manipulateurs. Dans cette section, les équations de vitesse sont obtenues sous forme matricielle, et les configurations singulières sont identifiées. Dans tous les cas présentés, les équations de vitesse contiennent une matrice \mathbf{A} multipliée par les vitesses cartésiennes et une matrice \mathbf{B} multipliée par les vitesses articulaires :

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (3.69)$$

On peut distinguer trois types de singularités selon [28].

Type I Ces singularités sont reliées aux matrices \mathbf{B} . Les matrices \mathbf{B} sont singulières lorsqu'une des pattes (chaînes cinématiques) atteint une de ses limites, tel que décrit au début du présent chapitre. On peut obtenir une vitesse nulle de l'organe terminal pour une vitesse articulaire non nulle. De plus, certaines combinaisons forces/couples appliquées à l'organe terminal peuvent être équilibrées sans efforts des actionneurs.

Type II Ces singularités sont reliées aux matrices \mathbf{A} . Les manipulateurs peuvent alors gagner au moins un degré de liberté : on peut obtenir une vitesse non nulle de l'organe terminal avec toutes les articulations actionnées bloquées. De plus, certaines combinaisons forces/couples appliquées à l'organe terminal ne peuvent pas être équilibrées, peu importe les efforts des actionneurs.

Type III Ce type de singularité peut exister seulement si certaines relations entre les paramètres architecturaux existent. Il est facile d'éviter l'existence de ces singularités et il faut s'en assurer.

Une description plus complète des singularités est donnée par [52, 53]. Les singularités sont identifiées à partir des équations cinématiques reliant les vitesses de sortie, les vitesses d'entrée ainsi que les vitesses des articulations passives. Selon cette classification, il existe six types de singularités et vingt et une classes qui représentent chacune une combinaison possible de deux à six types de singularités parmi les six identifiées.

- (i) Entrée redondante - Cette singularité est présente si on obtient une vitesse nulle de l'organe terminal malgré une vitesse d'entrée non nulle. Il n'existe pas de solution au PGI.
- (ii) Sortie redondante - Cette singularité est présente si on obtient une vitesse non nulle de l'organe terminal malgré une vitesse d'entrée nulle. Il n'existe pas de solution au PGD.
- (iii) Entrée impossible - Cette singularité est présente s'il existe un vecteur de vitesses articulaires passives impossible à obtenir peu importe la combinaison des vitesses d'entrée et de sortie. Il n'existe pas de solution au PGI.
- (iv) Sortie impossible - Cette singularité est présente s'il existe une vitesse de l'organe terminal impossible à obtenir peu importe la combinaison des vitesses aux articulations actionnées et passives. Il n'existe pas de solution au PGD.
- (v) Mobilité instantanée augmentée - Le manipulateur gagne au moins un DDL dans cette configuration singulière. Il n'existe pas de solution au PGD ni au PGI.

(vi) Mouvement passif redondant - Cette singularité est présente lorsque les articulations passives ont une vitesse non nulle malgré des vitesses d'entrée et de sortie nulles. Il n'existe pas de solution au PGD ni au PGI.

La deuxième description des singularités [52, 53] permet de déceler l'existence des singularités de contrainte qui ne sont pas repérées par l'équation (3.69) seule. Dans une telle configuration singulière, un manipulateur à n DDL ($n < 6$) gagne au moins un DDL. Le nom de ce type de singularité vient du type d'architecture concerné : manipulateurs à moins de six DDL *constraints* par chacune des pattes, par exemple, un manipulateur spatial à trois DDL ayant trois pattes à cinq DDL chacune. Ce type d'architecture comprend aussi les manipulateurs plans dont les pattes ont moins de trois DDL. Les manipulateurs présentés dans ces travaux ne sont pas sujets à des singularités de contrainte.

Dans la section suivante, les méthodes utilisées pour le calcul des propriétés cinématiques, telles que la dextérité et la raideur, sont présentées. Ces propriétés sont définies à partir des matrices jacobiennes \mathbf{A} et \mathbf{B} .

3.3.1 Manipulateur RPR plan à deux DDL et spatial à trois DDL

Les équations obtenues pour la solution au PGI sont les mêmes pour ces deux manipulateurs :

$$\rho_i^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{r}_i)^T (\mathbf{p} - \mathbf{r}_i), \quad \begin{array}{l} i = 1, 2 \text{ (2DDL)} \\ i = 1, 2, 3 \text{ (3DDL)} \end{array} \quad (3.70)$$

où $\mathbf{p} = [x \ y]^T$ (2DDL) et $\mathbf{p} = [x \ y \ z]^T$ (3DDL). En dérivant l'équation (3.3) par rapport au temps, on obtient

$$\rho_i \dot{\rho}_i = \mathbf{u}_i^T \dot{\mathbf{p}} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2 \text{ (2DDL)} \\ i = 1, 2, 3 \text{ (3DDL)} \end{array} \quad (3.71)$$

où $\dot{\mathbf{p}}$ est le vecteur de la vitesse cartésienne de l'organe terminal et $\dot{\boldsymbol{\rho}}$, est le vecteur des vitesses articulaires. On peut écrire les équations des vitesses sous une forme matricielle :

$$\mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{p}} \quad (3.72)$$

où \mathbf{B} est une matrice diagonale composée des termes ρ_i et \mathbf{A} est une matrice dont chaque ligne est un vecteur \mathbf{u}_i . Pour le 2-RPR :

$$\begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

et pour le 3-RPR :

$$\begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \\ \dot{\rho}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \mathbf{u}_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Dans le cas des chaînes cinématiques de type RPR, si l'on suppose que les vérins ont une plage de mouvement infinie, alors on obtient un espace atteignable infini et le premier type de singularité peut se produire seulement si l'un des vérins a une longueur nulle ($\det(\mathbf{B}) = 0$). Toutefois, avec un manipulateur réel, les actionneurs ont une plage de mouvement finie, c'est-à-dire : $\rho_{min} < \rho_i < \rho_{max}$, où ρ_{min} est, en général, différent de zéro. Dans ce cas, les singularités de type I se produiront lorsqu'au moins un des actionneurs atteint une de ses limites, c'est-à-dire :

$$\rho_i = \rho_{min} \quad \text{ou} \quad \rho_i = \rho_{max}, \quad i = 1, 2 \quad \text{ou} \quad 3 \quad (3.75)$$

ce qui correspond à une frontière de l'espace atteignable. La matrice \mathbf{A} du manipulateur à 2DDL est singulière lorsque les vecteurs \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 sont parallèles. La courbe des singularités correspond à la droite passant par les deux articulations rotoïdes passives à la base du manipulateur.

La matrice \mathbf{A} du manipulateur à trois DDL est singulière lorsque les vecteurs \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 et \mathbf{u}_3 sont dans un même plan (ou s'ils avaient la possibilité d'être parallèles). Les singularités correspondent au plan passant par les trois articulations rotoïdes passives à la base du manipulateur.

3.3.2 Manipulateur RRR plan à deux DDL

En dérivant les équations (3.25) et (3.39) par rapport au temps, on obtient

$$\mathbf{w}_i^T \dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{u}_i^T \dot{\mathbf{w}}_i = \mathbf{w}_i^T \dot{\mathbf{w}}_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.76)$$

avec les substitutions

$$\dot{\mathbf{u}}_i = \dot{\theta}_i \begin{bmatrix} -l_i \sin \theta_i \\ l_i \cos \theta_i \end{bmatrix} = \dot{\theta}_i \mathbf{E} \mathbf{u}_i \quad (3.77)$$

où

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.78)$$

De plus,

$$\dot{\mathbf{w}}_i = \dot{\mathbf{p}} \quad (3.79)$$

et

$$\mathbf{w}_i = (\mathbf{u}_i + \mathbf{v}_i) \quad (3.80)$$

puisque

$$\mathbf{u}_i + \mathbf{v}_i = \mathbf{p} - \mathbf{r}_i \quad (3.81)$$

et on arrive à la forme

$$\mathbf{v}_i^T \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}_i^T \mathbf{E} \mathbf{u}_i \dot{\theta}_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.82)$$

On peut regrouper les termes de l'équation (3.82) pour obtenir la forme matricielle

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.83)$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \mathbf{E} \mathbf{u}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{v}_2^T \mathbf{E} \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

\mathbf{A} et \mathbf{B} sont les matrices jacobiennes. La matrice \mathbf{A} sera singulière lorsque les vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 seront alignés. Le manipulateur rencontrera alors une singularité du type II. Les singularités du type I, qui représentent les limites de l'espace atteignable du manipulateur, seront rencontrées lorsque la matrice \mathbf{B} sera singulière, donc lorsque les vecteurs \mathbf{u}_1 et \mathbf{v}_1 ou les vecteurs \mathbf{u}_2 et \mathbf{v}_2 seront alignés.

3.3.3 Manipulateur RPR plan à trois DDL

Les matrices jacobiennes du manipulateur parallèle plan avec actionneurs prismatiques sont définies similairement à ce qui a été vu à la section précédente. En dérivant l'équation (3.8) par rapport au temps, on obtient

$$\rho_i \dot{\rho}_i = (\mathbf{p} + \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i)^T (\dot{\mathbf{p}} + \dot{\phi} \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{i0}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.85)$$

où a été substitué

$$\dot{\mathbf{Q}} = \dot{\phi} \mathbf{E} \mathbf{Q} \quad (3.86)$$

avec

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.87)$$

L'équation (3.85) peut être réécrite de la façon suivante

$$\rho_i \dot{\rho}_i = (\mathbf{p} + \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i)^T \dot{\mathbf{p}} + (\mathbf{p} + \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i)^T \dot{\phi} \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{i0}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.88)$$

ou bien

$$\rho_i \dot{\rho}_i = \mathbf{u}_i^T \dot{\mathbf{p}} + \dot{\phi} \mathbf{u}_i^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{i0}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.89)$$

sachant que

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{p} - \mathbf{r}_i + \mathbf{s}_i. \quad (3.90)$$

En regroupant les équations, on obtient

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.91)$$

où

$$\dot{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \\ \dot{\rho}_3 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

et avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{10} & \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{20} & \mathbf{u}_2^T \\ \mathbf{u}_3^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{30} & \mathbf{u}_3^T \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

La matrice \mathbf{A} est singulière lorsque les vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ et \mathbf{u}_3 s'intersectent en un point et aussi lorsque ces mêmes vecteurs sont tous parallèles. Une configuration singulière est montrée à la figure 3.14.

3.3.4 Manipulateur RRR plan à trois DDL

La position \mathbf{p} de l'organe terminal peut être exprimée par $\mathbf{p} = \mathbf{r}_i + \mathbf{u}_i + \mathbf{v}_i - \mathbf{s}_i$ où $i = 1, 2, 3$. L'équation qui est dérivée pour obtenir les équations de vitesse est $l_2^2 = \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i$, avec \mathbf{v}_i qui a été isolé dans l'équation ci-dessus pour \mathbf{p} :

$$l_2^2 = \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = (\mathbf{p} - \mathbf{r}_i - \mathbf{u}_i + \mathbf{s}_i)^T (\mathbf{p} - \mathbf{r}_i - \mathbf{u}_i + \mathbf{s}_i) \quad (3.94)$$

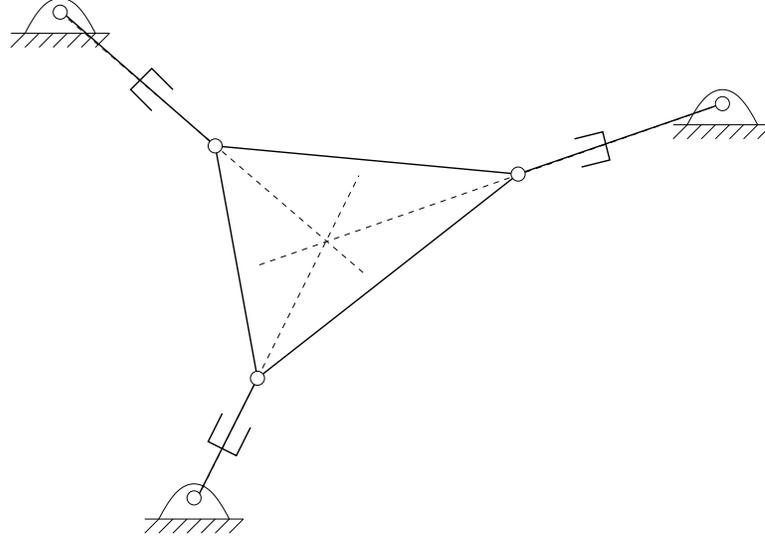


FIG. 3.14 – Singularité de type II du manipulateur parallèle plan à 3 DDL avec actionneurs prismatiques.

La dérivée est :

$$0 = \mathbf{v}_i^T (\dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{u}}_i + \dot{\mathbf{s}}_i) \quad (3.95)$$

Avec les substitutions :

$$\dot{\mathbf{u}}_i = \dot{\theta}_i \mathbf{E} \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

et

$$\dot{\mathbf{s}}_i = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{s}_{i0} = \dot{\phi} \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{i0} \quad (3.97)$$

où \mathbf{Q} est la matrice de rotation autour de l'axe z d'un angle ϕ , les équations de vitesse sont :

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{E} \mathbf{u}_i \dot{\theta}_i = \mathbf{v}_i^T \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{v}_i^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{i0} \dot{\phi}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.98)$$

Sous forme matricielle, les équations deviennent :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \mathbf{E} \mathbf{u}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{v}_2^T \mathbf{E} \mathbf{u}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{v}_3^T \mathbf{E} \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{10} & \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{20} & \mathbf{v}_2^T \\ \mathbf{v}_3^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{30} & \mathbf{v}_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

La matrice \mathbf{A} est singulière lorsque les vecteurs \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 et \mathbf{v}_3 s'intersectent en un point ou lorsque ces trois vecteurs sont parallèles. La matrice \mathbf{B} est singulière lorsque soit les vecteurs \mathbf{u}_1 et \mathbf{v}_1 , les vecteurs \mathbf{u}_2 et \mathbf{v}_2 , ou les vecteurs \mathbf{u}_3 et \mathbf{v}_3 sont alignés.

3.3.5 Manipulateur sphérique à trois DDL

Tel que pour les autres manipulateurs avec des chaînes cinématiques du type RPR, on dérive l'équation $\rho_i^2 = \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i$. Dans ce cas, $\mathbf{u}_i = \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i$.

$$\rho_i \dot{\rho}_i = \mathbf{u}_i^T \dot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{u}_i^T \dot{\mathbf{s}}_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.100)$$

puisque $\mathbf{s}_i = \mathbf{Q}\mathbf{s}_{i0}$, $\dot{\mathbf{s}}_i = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{s}_{i0}$ et $\dot{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q}$ où $\boldsymbol{\Omega}$ est le tenseur des vitesses angulaires :

$$\dot{\mathbf{s}}_i = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{s}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.101)$$

$$\rho_i \dot{\rho}_i = \mathbf{u}_i^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.102)$$

$\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur des vitesses angulaires et \times représente le produit vectoriel. La forme finale de l'équation devient :

$$\rho_i \dot{\rho}_i = (\mathbf{r}_i \times \mathbf{s}_i)^T \boldsymbol{\omega} \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.103)$$

et sous la forme matricielle :

$$\mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\omega} \quad (3.104)$$

où

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{s}_1)^T \\ (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_2)^T \\ (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{s}_3)^T \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

La matrice \mathbf{A} (à droite) est singulière si les trois vecteurs $\mathbf{s}_1 \times \mathbf{r}_1$, $\mathbf{s}_2 \times \mathbf{r}_2$ et $\mathbf{s}_3 \times \mathbf{r}_3$ sont coplanaires ou si un de ces vecteurs est nul.

3.4 Propriétés cinématiques

3.4.1 Singularités

Dans les algorithmes présentés au prochain chapitre pour l'obtention des zones singulières, les courbes des singularités (Type II [28]) seront utiles sous une forme discrétisée dans le cas des manipulateurs avec actionneurs prismatiques. Les équations

analytiques des manipulateurs $\underline{\text{RPR}}$ et $\underline{\text{SPS}}$ seront donc discrétisées. Ces équations sont obtenues à partir de la matrice jacobienne \mathbf{A} , avec la relation :

$$\det(\mathbf{A}) = 0. \quad (3.106)$$

Les courbes des singularités du manipulateur 3- $\underline{\text{RPR}}$ plan sont connues et les équations analytiques peuvent être retrouvées dans [16]. L'équation est quadratique et prend la forme :

$$E_1x^2 + E_2y^2 + E_3xy + E_4x + E_5y = 0 \quad (3.107)$$

où les coefficients E_i , $i = 1, 2, \dots, 5$ sont fonction de l'orientation ϕ de l'organe terminal et de la géométrie du manipulateur (\mathbf{r}_i et \mathbf{s}_i , $i = 1, 2, 3$). Le manipulateur présenté par l'auteur n'est pas complètement général et les coefficients n'ont pas pu être utilisés comme tel, mais l'équation demeure quadratique avec la forme de l'équation (3.107).

Les courbes des singularités du manipulateur 3- $\underline{\text{SPS}}$ sphérique sont aussi connues. Elles sont exprimées avec la représentation ZYZ d'Euler dans [24]. L'architecture est générale, mais les systèmes d'axes doivent être placés d'une certaine façon afin d'utiliser les équations obtenues. De plus, les angles d'Euler ne sont pas utilisés dans cette thèse.

Les courbes sont exprimées dans l'espace IT (inclinaison et torsion) dans [31]. Les expressions présentées sont valides seulement pour une architecture symétrique. Les équations requises sont donc dérivées à partir de l'équation (3.106).

Les algorithmes utilisés pour les mécanismes du type $\underline{\text{RRR}}$ étudiés sont différents de ceux utilisés pour les manipulateurs à actionneurs prismatiques. Les zones singulières ne sont pas obtenues à partir des courbes discrétisées des singularités. Il suffit de déterminer si un espace d'incertitude contient ou non des singularités.

Les espaces d'incertitudes sont petits en comparaison avec les dimensions des manipulateurs. Pour cette raison, il est impossible qu'une courbe fermée des singularités soit entièrement incluse à l'intérieur de l'un de ceux-ci, sans intersection avec ses frontières. Vérifier s'il y a un changement du signe du déterminant, calculé à intervalles sur la frontière, est suffisant pour déterminer si un espace d'incertitude contient ou non des configurations singulières. Pour être exempt de singularités, tous les déterminants calculés sur les frontières d'un espace d'incertitude devraient avoir soit seulement des signes négatifs, soit seulement des signes positifs. La figure 3.15 comprend un espace

d'incertitude (en rouge), la courbe des singularités (en vert) et un nombre de points où le déterminant a été calculé, le signe étant affiché. Si les signes ne sont pas homogènes, tel que montré à la figure 3.15, c'est une courbe des singularités qui délimite la frontière entre les signes positifs et les signes négatifs.

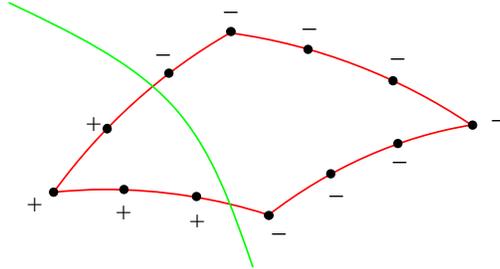


FIG. 3.15 – Espace d'incertitude et recherche d'une intersection avec la courbe des singularités.

Il est important d'obtenir les courbes singulières afin de voir l'effet de leur proximité sur les propriétés d'un manipulateur. Il est impossible, dans le cas du 2-RRR et du 3-RRR, d'obtenir les équations analytiques. La fonction de traçage des courbes de niveau du logiciel Matlab a été utilisée pour tracer les courbes des singularités.

Un rectangle discrétisé selon les axes x et y contient l'espace de travail d'un manipulateur. À chaque point inclus à l'intérieur de l'espace de travail, le déterminant de la jacobienne est calculé. Sachant que la matrice jacobienne d'un manipulateur a un déterminant nul en configuration singulière, on peut tracer la courbe de niveau correspondant à la valeur zéro en se servant de l'algorithme de traçage des courbes de niveaux du logiciel Matlab. Ce logiciel requiert une discrétisation rectangulaire, telle que montrée à la figure 3.16. Les interpolations sont effectuées sur chaque rectangle, quatre points à la fois pour la recherche des zéros, même s'il est plus efficace d'interpoler sur des triangles [104].

3.4.2 Dextérité

Lorsque le déterminant de la jacobienne est égal à zéro, la configuration correspondante est singulière. Par contre, la valeur (non-nulle) du déterminant n'est pas une

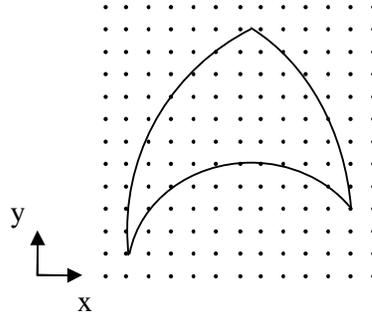


FIG. 3.16 – Espace de travail et discrétisation.

bonne mesure de la dextérité. Le conditionnement de la jacobienne a été utilisé par plusieurs chercheurs [11, 14, 27, 66–71, 74–82].

D’après Merlet [86], le conditionnement de la matrice jacobienne ne devrait pas être utilisé pour évaluer la précision d’un manipulateur parallèle, puisque c’est seulement une mesure de l’isotropie de l’erreur. Les erreurs maximales en position, les erreurs moyennes et leur variance sur l’ensemble de l’espace de travail sont les mesures qui devraient être utilisées. D’autres n’ont pas d’objections à l’utilisation du conditionnement pour l’évaluation de manipulateurs parallèles si les DDL de l’organe terminal sont seulement des déplacements ou seulement des rotations dans l’espace cartésien [85, 87, 88].

Les chapitres 5 et 6 comprennent une comparaison du conditionnement (dextérité) et de l’erreur (position et/ou orientation) lorsque les DDL de l’organe terminal ont des unités homogènes et lorsqu’ils ont des unités non-homogènes. Le calcul de l’erreur est effectué pendant l’obtention des espaces d’incertitudes dus au jeu dans les articulations passives et à la flexibilité des membrures, selon les méthodes présentées au chapitre 4.

Le conditionnement de la matrice jacobienne est défini par :

$$\kappa = \|\mathbf{J}\| \|\mathbf{J}^{-1}\| \quad (3.108)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme de la matrice, qui est calculée comme suit :

$$\|\mathbf{J}\| = [\text{tr}(\mathbf{J}\mathbf{W}\mathbf{J}^T)]^{\frac{1}{2}} \quad (3.109)$$

où $\mathbf{W} = w\mathbf{1}$ et $w = 1/n$. La jacobienne est de dimension $n \times n$. $\mathbf{1}$ est la matrice identité de dimension n et tr indique la trace de la matrice. Une façon équivalente d’écrire

l'équation (3.109) est :

$$\|\mathbf{J}\| = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n J_{ij}^2} \quad (3.110)$$

où J_{ij} est l'élément ij de la matrice \mathbf{J} . L'équation (3.110) doit être appliquée de la même façon à \mathbf{J}^{-1} . Le conditionnement κ peut prendre des valeurs entre un et l'infini. Une matrice parfaitement conditionnée, ou isotrope, a une valeur de κ égale à un. Il est préférable d'avoir un indice borné, alors le suivant, qui peut prendre des valeurs entre zéro et un est utilisé :

$$\eta = 1/\kappa \quad (3.111)$$

Une matrice parfaitement conditionnée a une valeur de η égale à un. Quand η a une valeur de zéro, le manipulateur est en configuration singulière.

Le calcul du conditionnement, tel que présenté ci-haut, pose un problème dans les cas où les unités de la jacobienne ne sont pas homogènes. Deux des manipulateurs étudiés sont concernés puisque les équations de vitesse contiennent la vitesse cartésienne (v_x, v_y) dans le plan xy et la vitesse angulaire autour de l'axe z : ce sont le 3-RPR plan et le 3-RRR plan.

Gosselin [83] a présenté une méthode qui permet d'obtenir une matrice jacobienne ayant des unités homogènes. Les équations de vitesse de l'organe terminal sont remplacées par les équations de la vitesse cartésienne (v_x, v_y) de trois points (A, B et C) sur la plate-forme mobile appelées les vitesses généralisées. La façon optimale de choisir ces trois points a été présentée par Kim [84]. Les trois points doivent former un triangle équilatéral dont le centre correspond au centroïde des trois points d'attache des pattes sur la plate-forme mobile. De plus, la taille du triangle équilatéral devrait ressembler le plus possible à celle de la plate-forme mobile. Le choix des dimensions du triangle équilatéral a une influence sur la valeur de la dextérité calculée, mais dans le cas des travaux qui seront présentés dans cette thèse, chaque manipulateur sera comparé à lui-même lors de l'étude de la dégénérescence des propriétés cinématiques.

Selon les travaux de Gosselin [83], les vitesses généralisées $\dot{\mathbf{c}}'$

$$\dot{\mathbf{c}}' = \left[\mathbf{v}_A^T \quad \mathbf{v}_B^T \quad \mathbf{v}_C^T \right]^T \quad (3.112)$$

peuvent être reliées aux vitesses de l'organe terminal $\dot{\mathbf{c}}$

$$\dot{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} & \dot{x} & \dot{y} \end{bmatrix}^T \quad (3.113)$$

par la matrice \mathbf{S} ,

$$\dot{\mathbf{c}}' = \mathbf{S}\dot{\mathbf{c}} \quad (3.114)$$

définie dans l'équation (3.115). Les positions \mathbf{p}'_A , \mathbf{p}'_B et \mathbf{p}'_C des trois points sont exprimés dans le repère de la plate-forme mobile. Les vitesses \mathbf{v}_A , \mathbf{v}_B et \mathbf{v}_C de ces points sont exprimés dans le repère fixe.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}\mathbf{p}'_A & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{W}\mathbf{p}'_B & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{W}\mathbf{p}'_C & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

où \mathbf{I}_2 est la matrice identité de dimension 2 et :

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -\sin \phi & -\cos \phi \\ \cos \phi & -\sin \phi \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

L'équation des vitesses : $\mathbf{A}\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{B}\dot{\rho}$, qui correspond au manipulateur 3-RPR, peut être écrite sous la forme $\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{J}\dot{\rho}$ avec $\mathbf{J} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. En prémultipliant chaque côté de la dernière équation des vitesses par la matrice \mathbf{S} et en effectuant quelques substitutions, on obtient l'expression de la nouvelle matrice jacobienne ayant des unités homogènes.

$$\mathbf{S}\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{S}\mathbf{J}\dot{\rho} \quad (3.117)$$

après les substitutions $\dot{\mathbf{c}}' = \mathbf{S}\dot{\mathbf{c}}$ et $\mathbf{J}' = \mathbf{S}\mathbf{J}$, l'équation ci-dessus devient :

$$\dot{\mathbf{c}}' = \mathbf{J}'\dot{\rho} \quad (3.118)$$

La matrice jacobienne ayant des unités homogènes $\mathbf{J}' = \mathbf{S}\mathbf{J}$ est aussi celle qui doit apparaître dans le calcul du conditionnement du manipulateur 3-RRR.

3.4.3 Raideur

La raideur d'un mécanisme dans l'espace cartésien, \mathbf{K}_C , avant l'application d'un torseur, est donnée par l'expression suivante :

$$\mathbf{K}_C = \mathbf{J}^T \mathbf{K}_J \mathbf{J} \quad (3.119)$$

où \mathbf{J} est la matrice jacobienne du manipulateur et \mathbf{K}_J est une matrice diagonale qui contient la raideur de chaque articulation. Puisqu'il n'y a pas de comparaison de faite entre deux manipulateurs différents, l'étude de la raideur sera simplifiée en donnant une valeur unitaire à la raideur de chaque articulation. La matrice \mathbf{K}_J sera donc une matrice identité. Les termes qui se trouvent sur la diagonale de \mathbf{K}_C représentent chacun la raideur selon une composante des coordonnées cartésiennes. Par exemple, les termes \mathbf{K}_{C11} et \mathbf{K}_{C22} sont la raideur selon l'axe x et l'axe y , respectivement, des manipulateurs plans à deux DDL.

La raideur ainsi définie est valide seulement si un torseur externe appliqué est nul puisqu'elle ne considère pas les déformations causées par le torseur. Pour tenir compte des déformations, un terme est ajouté à la matrice \mathbf{K}_C [102] :

$$\mathbf{K}_C = \mathbf{J}^T \mathbf{K}_J \mathbf{J} + \mathbf{K}_g \quad (3.120)$$

où :

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{J}^T}{\partial x_1} \tau & \frac{\partial \mathbf{J}^T}{\partial x_2} \tau & \dots & \frac{\partial \mathbf{J}^T}{\partial x_n} \tau \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

où τ est le torseur appliqué à l'organe terminal et n est le DDL. Si le torseur et la configuration d'un manipulateur sont connus, on peut calculer la raideur avec l'équation (3.120). Dans les travaux de cette thèse, il n'y a pas de torseur connu. L'approche utilisée pour le calcul de la raideur minimale possible sera basée sur les déformations maximales prévues, tel que défini au chapitre suivant.

Le terme *raideur* peut décrire la capacité d'un manipulateur à exercer un torseur (force et/ou moment) sur son environnement, ou bien sa capacité de résister à un torseur externe exercé sur son organe terminal. Un manipulateur peut être incapable d'exercer un torseur s'il est sur une frontière de son espace de travail, puisqu'il perd au moins un DDL, mais avoir la capacité de résister au même torseur. Les raideurs présentées dans cette thèse sont la capacité d'un manipulateur à résister à un torseur.

Chapitre 4

L'effet du jeu et de la flexibilité

Ce chapitre présente l'approche utilisée pour modéliser le jeu dans les articulations passives, la flexibilité dans les articulations actionnées et dans les membrures ainsi que la façon d'intégrer le jeu et la flexibilité dans un même modèle. On voit comment ce modèle permet un mouvement de l'organe terminal, même lorsque toutes les articulations actionnées sont bloquées (immobiles). Ce mouvement de l'organe terminal entraîne une dégénérescence parfois importante des propriétés globales d'un manipulateur.

Une étude statique de l'effet du jeu et de la flexibilité permet de considérer qu'il y a toujours un contact entre les pièces qui composent l'articulation. Tout en simplifiant l'étude, ceci donne des résultats conservateurs étant donné qu'à tout moment, ou à toute position d'un manipulateur, c'est la plus sévère dégénérescence possible des propriétés de celui-ci qui est enregistrée.

La méthode choisie pour l'étude du mouvement de l'organe terminal dû au jeu est la même pour tous les manipulateurs présentés et c'est donc ceci qui sera présenté en premier (sections 4.1 et 4.2). Les manipulateurs constitués de chaînes cinématiques du type $R\underline{P}R$ ou du type $S\underline{P}S$ et ceux constitués de chaînes cinématiques du type $\underline{R}RR$ comportent des différences nettes dans leurs modèles respectifs de la flexibilité et doivent être étudiés séparément. La façon de combiner le jeu et la flexibilité dans un même modèle est ensuite présentée (section 4.4).

La manière de déterminer les effets du jeu et de la flexibilité sur certaines propriétés cinématiques reliées à la matrice jacobienne d'un manipulateur est différente selon le type de chaînes cinématiques de celui-ci ($\underline{R}RR$ ou $R\underline{P}R/S\underline{P}S$). Pour terminer, les deux approches développées sont expliquées (section 4.5).

4.1 Modélisation du jeu dans les articulations rotoïdes passives

Un modèle simple de jeu à un DDL est adopté. La figure 4.1 montre une articulation rotoïde comprenant du jeu. L'exagération permet de bien définir celui-ci : sa valeur est définie comme étant la distance entre le centre de l'alésage et le centre du goujon lorsqu'il y a contact dans l'articulation.

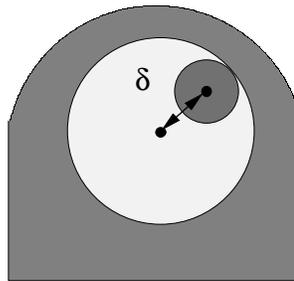


FIG. 4.1 – Modèle du jeu dans une articulation rotoïde passive.

Sur une patte, le jeu existant aux deux extrémités (δ_1 et δ_2) est considéré, tel que montré dans la figure 4.2. Il est important de préciser que c'est la membrure (patte)

qui contient les alésages, dans cette modélisation. Si une force de compression est subie par une membrure de longueur ρ , ayant une articulation rotoïde ou sphérique passive à chaque extrémité, la longueur résultante de la membrure est de $\rho - \delta_1 - \delta_2$. À l’opposé, dans le cas d’une force de tension, la longueur résultante de la membrure est alors de $\rho + \delta_1 + \delta_2$. Sous l’action des forces, la longueur des membrures peut varier d’une valeur totale de $2(\delta_1 + \delta_2)$. Puisque δ_1 et δ_2 sont toujours impliqués en même temps et avec le même signe \pm , ils sont remplacés par un seul terme, soit δ_{jeu} , dans le reste de cette thèse. Il est aussi supposé que la valeur de δ_{jeu} est la même retrouvée dans toutes les pattes d’un même manipulateur.

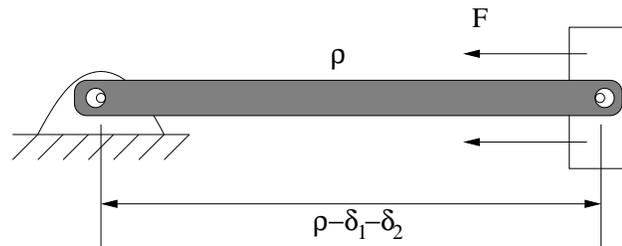


FIG. 4.2 – Effet du jeu sur la longueur d’une patte.

Ce modèle est appliqué à chaque chaîne cinématique du type $R\underline{P}R$ ou $S\underline{P}S$ lorsque l’articulation prismatique est immobile et à la membrure distale de chaque chaîne cinématique du type $\underline{R}RR$ lorsque la membrure proximale est immobile. Dans les deux cas, la chaîne cinématique équivalente à laquelle le modèle de la figure 4.2 est appliqué est RR (ou SS), tel que montré dans la figure 4.3.

Pour tous les manipulateurs étudiés ici, toute combinaison de forces et moments appliqués (ou à appliquer) à l’organe terminal se traduit par des forces de compression ou de tension dans les chaînes cinématiques RR définies dans la figure 4.3. On ne retrouve pas de flexion ou de torsion.

En situation statique, on considère qu’il y a toujours un contact dans les articulations ayant du jeu. Chaque patte a donc soit la longueur $\rho + \delta_{jeu}$ soit la longueur $\rho - \delta_{jeu}$ et non une longueur comprise dans l’intervalle $[\rho - \delta_{jeu}, \rho + \delta_{jeu}]$. Certains auteurs varient la longueur des membrures de la même façon que présenté ici afin de modéliser le jeu aux articulations [19, 34, 36, 42]. Une autre approche est équivalente si elle est appliquée aux quatre manipulateurs avec actionneurs prismatiques étudiés dans cette thèse [87, 88, 105]. Dans ces travaux, l’erreur à l’organe terminal est calculé

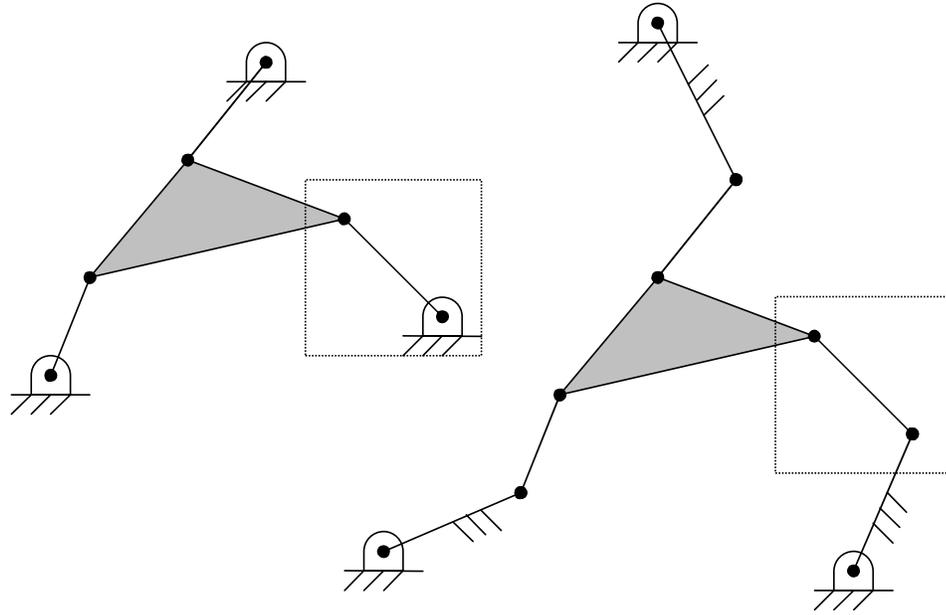


FIG. 4.3 – Membrures RR dans deux types de chaînes cinématiques lorsque les actionneurs sont immobiles.

en considérant l'erreur dans les actionneurs, qui est un intervalle d'incertitude. Si les actionneurs sont prismatiques, il est équivalent de varier la longueur des membrures. Dans Merlet et Daney [105], d'autres sources d'erreur sont aussi considérées.

4.2 Espace d'incertitude dû au jeu

Ces espaces sont obtenus en immobilisant les actionneurs. Selon le modèle présenté à la section précédente, on fait varier la longueur des pattes d'un manipulateur pour obtenir l'espace d'incertitude dû au jeu. Ceci s'applique à toutes les pattes qui sont des chaînes cinématiques du type $R\underline{P}R$ ou du type $S\underline{P}S$ et à toutes les membrures distales des chaînes cinématiques du type $\underline{R}RR$, puisqu'elles ont toutes une articulation rotoïde ou sphérique passive à chaque extrémité (chaînes RR ou SS).

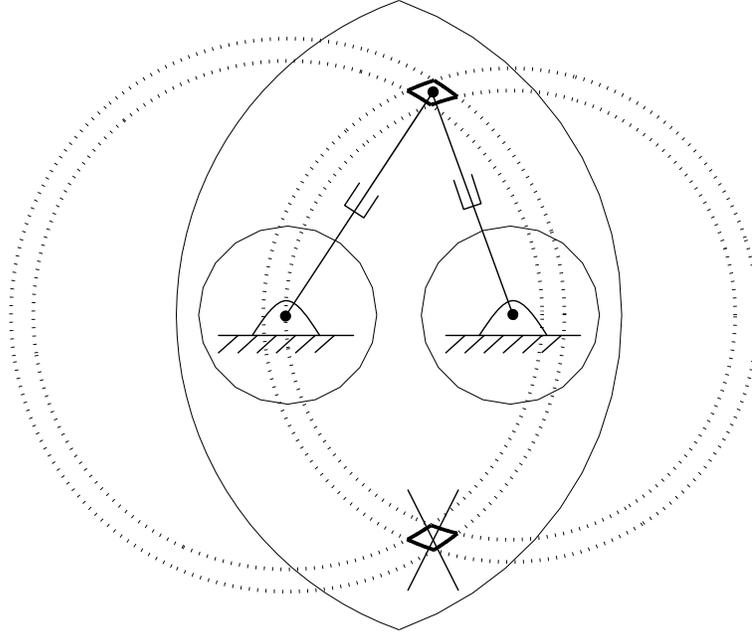


FIG. 4.4 – Espace d’incertitude dû au jeu et morceau à éliminer.

4.2.1 Manipulateurs avec chaînes RPR ou SPS

Dans le cas de ces manipulateurs, l’espace d’incertitude dû au jeu est obtenu de la même façon que l’espace atteignable (au chapitre 3) sauf qu’on remplace les longueurs minimum et maximum des actionneurs par $\rho_i - \delta_{jeu}$ et $\rho_i + \delta_{jeu}$, $i = 1, 2$ (deux DDL) ou $i = 1, 2, 3$ (trois DDL). Puisqu’on s’intéresse seulement à l’espace que peut atteindre le manipulateur à partir d’une position donnée une fois les articulations immobilisées, on doit vérifier si l’espace d’incertitude (dû au jeu) obtenu est entièrement relié ou s’il est composé de plus d’un morceau. Il faut éliminer les morceaux qui ne sont pas reliés à celui qui contient la position désirée de l’organe terminal. Ceci est illustré à la figure 4.4 à l’aide du manipulateur RPR plan à deux DDL.

L’espace d’incertitude obtenu avec la méthode décrite au chapitre 3 a deux morceaux. Dans la configuration montrée du manipulateur, seul le morceau du haut est réellement atteignable. Quelques étapes permettent d’éliminer celui du bas :

1. Déterminer quel arc est le plus près de l’organe terminal. Cet arc devient le premier à être ajouté à la liste des arcs formant la frontière réelle de l’espace d’incertitude dû au jeu. Un des bouts de l’arc devient le point de départ.
2. Chercher un arc adjacent au dernier arc ajouté à la liste.

3. Vérifier si l'arc nous ramène au point de départ et ainsi définir une frontière fermée. Si oui arrêter, sinon ajouter cet arc à la liste et répéter l'étape précédente.

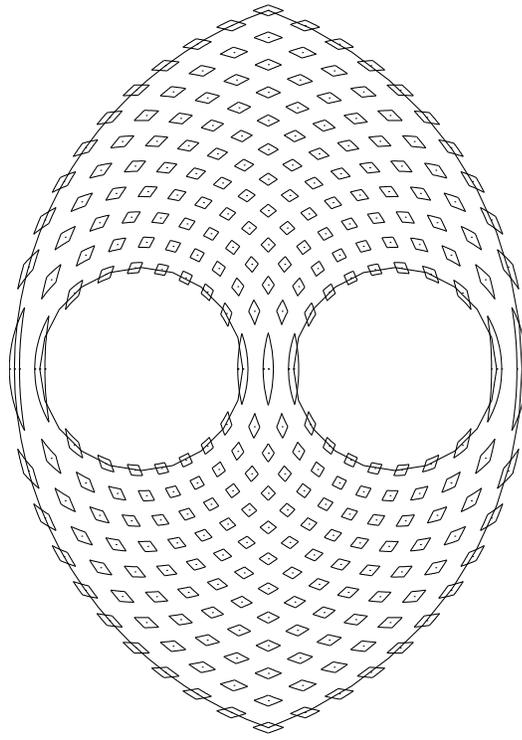


FIG. 4.5 – Variation des espaces d'incertitudes dû au jeu.

Pour produire la figure 4.5, l'espace de travail du manipulateur a été discrétisé en variant ρ_1 et ρ_2 , la longueur des pattes. À chaque point correspondant à une valeur de ρ_1 et de ρ_2 (montré), le mouvement permis par le jeu a été tracé. Ces espaces varient en forme et en taille selon leur position dans l'espace de travail. Ce mouvement va générer des erreurs de positionnement (et/ou d'orientation, selon le manipulateur). Il peut causer une dégénérescence des propriétés du manipulateur, telles la raideur et la dextérité. Dans le pire des cas, le jeu peut permettre au manipulateur dans une position non-singulière d'atteindre une singularité.

Dans le cas du manipulateur 3-SPS spatial, du manipulateur 3-RPR plan et du manipulateur SPS sphérique, l'espace d'incertitude à considérer est tri-dimensionnel. En discrétisant selon l'axe z , selon ϕ ou selon σ , pour les trois manipulateurs, respectivement, il faut non seulement vérifier si l'espace d'incertitude dû au jeu, dans chaque plan (xy ou $\phi\theta$), est composé de plus d'un morceau (et procéder à l'élimination d'arcs, s'il y a lieu), mais aussi vérifier si les espaces d'incertitudes de couches successives sont reliés. Ils le seront si l'intersection des deux espaces successifs projetés sur le plan xy

ou $\phi\theta$ n'est pas nul.

La figure 4.6 montre l'espace d'incertitude dû au jeu en un point de l'espace de travail du manipulateur 3-RPR plan. À chaque valeur de ϕ résultant de la discrétisation, c'est l'espace de travail exact qui est tracé. La différence entre deux valeurs successives de ϕ doit être suffisamment petite pour bien représenter la forme de l'espace tri-dimensionnel et assez grande pour minimiser le temps de calcul. Il faut prendre le temps de bien choisir $\Delta\phi$ à chaque architecture étudiée.

L'approche est la même pour le manipulateur 3-SPS spatial. À chaque valeur de z de l'espace d'incertitude discrétisé, les frontières obtenues de l'espace d'incertitude composées d'arcs de cercles sont exactes. Il faut bien choisir la grandeur de Δz .

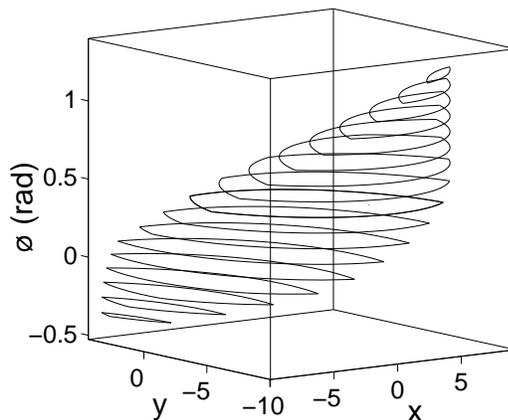


FIG. 4.6 – Espace d'incertitude à trois dimensions du 3-RPR plan discrétisé selon ϕ .

L'espace d'incertitude de la figure 4.6 ne contient pas de discontinuités et est entièrement relié. La figure 4.7 illustre ce qui constitue *deux couches successives reliées* dans un espace d'incertitude lorsqu'elles sont projetées dans un même plan. Voici les étapes à suivre pour la vérification de la continuité entre deux couches :

1. Avoir une couche d'un espace d'incertitude continu (un seul morceau) définie par une liste d'arcs : arcs1
2. Obtenir une couche successive de l'espace d'incertitude définie par une liste d'arcs : arcs2 et s'assurer qu'elle soit constituée d'un seul morceau
3. Vérifier si au moins un des arcs de l'ensemble arcs2 intersecte un des arcs de l'ensemble arcs1. Si oui, passer à l'étape 7
4. Vérifier si un des arcs de l'ensemble arcs2 est à l'intérieur de la frontière délimitée par les arcs arcs1. Si oui, passer à l'étape 7

5. Vérifier si un des arcs de l'ensemble arcs1 est à l'intérieur de la frontière délimitée par les arcs arcs2. Si oui, passer à l'étape 7
6. L'espace d'incertitude est complet, arrêter
7. arcs1=arcs2, aller à l'étape 2

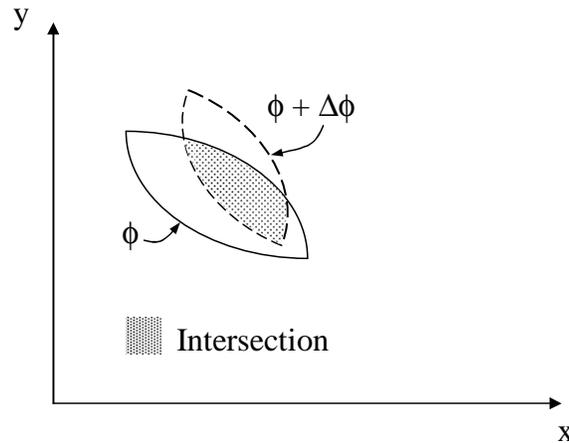


FIG. 4.7 – Deux couches successives d'un espace 3D projetées dans un même plan.

Puisque l'espace du manipulateur sphérique 3-SPS est lui aussi tri-dimensionnel, l'espace d'incertitude est obtenu une couche à la fois, en discrétisant l'angle de torsion, qui est l'axe vertical de la représentation cylindrique. Chaque couche est l'espace d'incertitude à un angle de torsion (σ) constant. Cet espace consiste en un ensemble de points correspondant aux inclinaisons (θ) et azimuths (ϕ) possibles pour la torsion en question. L'inclinaison et l'azimuth sont eux aussi discrétisés. Tel que dans les cas précédents, il faut une continuité de l'espace d'incertitude à chaque couche et entre chaque paire de couches successives. L'approche est différente puisque les trois variables sont discrétisées. La recherche de points qui constituent l'espace d'incertitude dû au jeu se fait à partir du point initial ($\sigma\phi\theta$), avant l'introduction du jeu. Il est donc impossible d'obtenir un espace d'incertitude qui n'est pas entièrement relié ou qui ne contient pas le point initial, à moins de ne pas avoir soigneusement choisi les valeurs $\Delta\sigma$, $\Delta\phi$ ou $\Delta\theta$.

Voici les étapes de recherche des points faisant partie de l'espace d'incertitude, à partir d'un point choisi $\sigma\phi\theta$:

1. À des valeurs σ et ϕ constantes, incrémenter θ jusqu'à ce qu'un point $\sigma\phi\theta$ ne fasse plus partie de l'espace d'incertitude, en calculant la longueur correspondante de ρ_1 , ρ_2 et ρ_3

2. Pour une valeur $\phi \pm \Delta\phi$, incrémenter θ pour obtenir les points faisant partie de l'espace d'incertitude, en commençant la recherche à la valeur moyenne de θ de la recherche précédente
3. Reprendre l'étape 2 jusqu'à l'obtention d'un ensemble vide de points
4. Si des points ont été obtenus, calculer la valeur moyenne de ϕ et la valeur moyenne de θ pour la couche de l'espace d'incertitude qui vient d'être complétée, sinon arrêter (l'espace d'incertitude est complet)
5. Pour une valeur $\sigma \pm \Delta\sigma$, recommencer la procédure à partir de l'étape 1 avec les valeurs moyennes de ϕ et de θ comme point de départ

4.2.2 Manipulateurs avec chaînes RRR

Lorsqu'on immobilise les actionneurs rotoïdes de ce type de manipulateur, on peut retrouver l'équivalent d'un manipulateur RPR, lui aussi avec ses actionneurs immobiles. La figure 4.8 montre le passage du manipulateur 2-RRR avec ses actionneurs immobiles et du jeu aux articulations passives à un manipulateur 2-RPR sans jeu avec $L_3 - \delta_{jeu} < \rho_1 < L_3 + \delta_{jeu}$ et $L_4 - \delta_{jeu} < \rho_2 < L_4 + \delta_{jeu}$, en passant par un manipulateur 2-RPR avec jeu.

Cette transformation permet de voir comment obtenir l'espace d'incertitude dû au jeu. Une fois le manipulateur équivalent obtenu, la méthode utilisée est la même que celle appliquée au manipulateur 2-RPR. Si les entrées sont connues (θ_1 et θ_2), la position (a, b) et (c, d) des articulations fixes du manipulateur équivalent est connue.

$$\begin{aligned}
 a &= r_{1x} + L_1 \cos \theta_1 \\
 b &= r_{1y} + L_1 \sin \theta_1 \\
 c &= r_{2x} + L_2 \cos \theta_2 \\
 d &= r_{2y} + L_2 \sin \theta_2
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Dans le cas du 3-RRR plan, la même procédure que celle appliquée au 2-RRR permet de faire une transformation du manipulateur 3-RRR plan à un 3-RPR plan et d'obtenir son espace d'incertitude dû au jeu de la même manière que celui du 3-RPR plan. Une fois les actionneurs rotoïdes immobiles, l'architecture et la position du manipulateur 3-RPR plan équivalent sont connues.

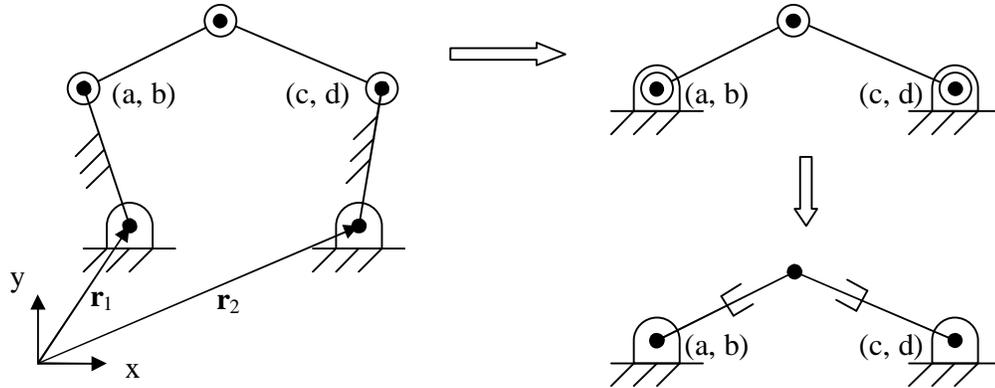


FIG. 4.8 – Manipulateur RPR équivalent à 2 DDL.

4.3 Modélisation de la flexibilité dans les membrures

L'effet de la flexibilité des membrures ne se manifeste pas de la même manière selon l'architecture du manipulateur. Toutes les membrures sont soumises à des contraintes de tension et de compression, mais pas toutes à des contraintes de flexion. Les approches utilisées sont présentées en commençant par les cas les plus simples : les chaînes cinématiques RPR et SPS. Viendront ensuite les manipulateurs 2-RRR et 3-RRR plans.

4.3.1 Manipulateurs avec chaînes RPR ou SPS

Des forces de tension et de compression étirent et compriment les pattes, respectivement. Les forces imposées ne produisent pas de contraintes de flexion. La variation de la longueur des pattes (articulations prismatiques), ΔL , selon la loi de Hooke, est la grandeur de la force F , divisée par la raideur k :

$$\Delta L = F/k \quad (4.2)$$

En estimant la raideur minimum attendue d'une patte et les forces maximales prévues, on peut calculer la variation maximale possible de la longueur des pattes ($\delta_F = \Delta L_{max}$).

Pour ces manipulateurs, la combinaison du jeu et de la flexibilité dans un même modèle est simple. La variation de longueur δ_F s'ajoute à la variation de la longueur

d'une patte due au jeu δ_{jeu} . La variable δ représente la combinaison des deux :

$$\delta = \delta_{jeu} + \delta_F \quad (4.3)$$

La valeur utilisée de δ dans les calculs peut alors contenir à la fois l'effet du jeu et de la flexibilité. On obtient les limites suivantes pour la longueur possible des pattes lorsque les actionneurs prismatiques sont immobiles si les pires dégénérescences possibles sont recherchées :

$$\begin{aligned} \rho_i - \delta & \text{ pour une force de compression} \\ \rho_i + \delta & \text{ pour une force de tension} \end{aligned} \quad (4.4)$$

pour $i=1,2$ (deux DDL) ou $i=1,2,3$ (trois DDL). L'espace d'incertitude dû au jeu et à la flexibilité est déterminé exactement de la même façon que l'espace d'incertitude dû au jeu seul, et ce pour tous les manipulateurs ayant des chaînes cinématiques du type \underline{RPR} ou du type \underline{SPS} .

4.3.2 Manipulateurs avec chaînes \underline{RRR}

L'effet d'une force appliquée à la chaîne cinématique du type \underline{RRR} est montré dans la figure 4.9. Le modèle de la flexibilité de cette chaîne cinématique se divise en

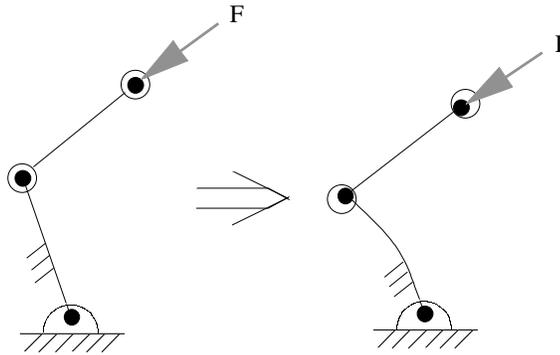


FIG. 4.9 – Chaîne cinématique flexible du type \underline{RRR} soumise à une force F .

deux parties : une pour la membrure proximale et l'autre pour la membrure distale. Cette dernière est traitée de la même façon que la patte \underline{RPR} , lorsque son articulation actionnée est immobile. Ainsi, sa longueur L se trouve dans l'intervalle suivant :

$$[L - \delta, L + \delta] \quad (4.5)$$

Chaque membrure proximale subit des forces de tension ou de compression et/ou de flexion. Une telle membrure peut être traitée comme une poutre encastrée à un bout, où se trouve l'articulation rotoïde actionnée immobile. La tension et la compression changent la longueur de la membrure. L'effet de la flexion peut être combiné à la flexibilité existante dans l'articulation actionnée, tel que retrouvé dans [98], d'où sont tirées les équations (4.6) à (4.11).

La figure 4.10 a) montre une poutre qui subit une déformation due à un moment de flexion causée par la force F . L'extrémité libre de la poutre subit un déplacement vertical δ qui peut être calculé comme suit :

$$\delta = \frac{FL^3}{3EI} \quad (4.6)$$

où E est le module d'élasticité de Young et I est le moment d'inertie d'une section de

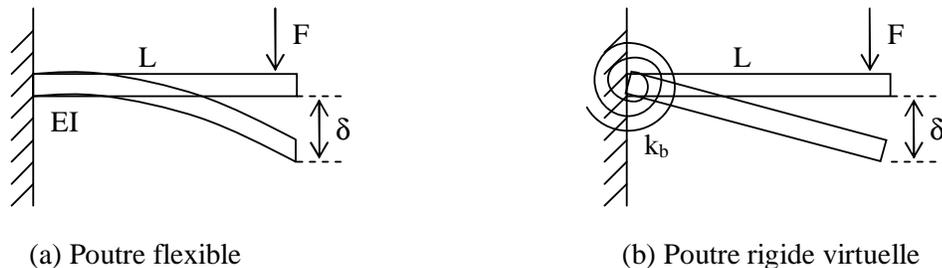


FIG. 4.10 – Poutre encastrée : modélisation de la flexion.

la poutre par rapport à l'axe neutre.

Pour de petites déformations, on peut supposer que la rotation de la poutre rigide virtuelle (figure 4.10 b)) ayant un ressort en torsion de raideur k_b sera de θ , où θ sera à peu près égal à δ/L , puisque

$$\delta/L = \sin \theta \simeq \theta \quad (4.7)$$

si θ est petit. À partir des équations (4.6) et (4.7), on peut écrire :

$$\theta = \frac{FL^2}{3EI} \quad (4.8)$$

Selon le principe du travail virtuel, on peut écrire :

$$\frac{1}{2}F\delta = \frac{1}{2}k_b(\theta)^2 \quad (4.9)$$

et enfin

$$k_b = 3EI/L \quad (4.10)$$

à l'aide des équations (4.7) et (4.8). Si la raideur de l'articulation a une valeur k_θ et qu'elle est modélisée par l'ajout d'un ressort en torsion, on peut traiter les deux raideurs, k_b et k_θ , comme deux ressorts en série et donc calculer la raideur équivalente (qui sera plus faible) comme suit :

$$k = \frac{k_\theta k_b}{k_\theta + k_b} \quad (4.11)$$

Puisqu'on cherche à déterminer la pire dégénérescence possible sans connaître les torseurs qui seront appliqués, la force F choisie est une force maximale prévue, la raideur k utilisée est la raideur minimale connue et la force est placée perpendiculaire à la poutre. Les résultats obtenus seront donc conservateurs, faute d'être exacts. L'espace d'incertitude réel dû au jeu et à la flexibilité serait plus difficile et beaucoup plus long à obtenir de façon exacte, alors un espace d'incertitude approximatif plus simple est défini à la section suivante. Notons que l'espace d'incertitude réel doit être entièrement compris dans l'espace d'incertitude approximatif et ce sera le cas si la force F est perpendiculaire à la poutre.

4.4 Espace d'incertitude dû au jeu et à la flexibilité

L'espace d'incertitude dû au jeu et à la flexibilité et l'espace d'incertitude dû au jeu seul s'obtiennent de la même façon pour les manipulateurs RPR et SPS puisque leurs pattes sont soumises à des contraintes de tension et de compression seulement. La variation de la longueur des pattes est plus grande lorsqu'on ajoute l'effet de la flexibilité à celui du jeu.

L'ensemble des déplacements possibles (espace d'incertitude) dues aux contraintes de flexion dans les chaînes de type RRR sont plus difficiles à inclure dans un modèle, surtout lorsque le temps de calcul est un critère important dans l'élaboration du modèle. Afin d'ajouter facilement le mouvement de l'organe terminal dû au jeu et à la flexibilité dans un programme informatique, une représentation approximative constituée d'arcs de cercles a été choisie.

Sans considérer la flexibilité, l'espace d'incertitude du manipulateur 2-RRR plan dû

au jeu (une fois les articulations immobiles) est l'intersection de deux anneaux, chacun d'eux étant formé d'une paire de cercles concentriques. Le modèle comprenant la flexion dans les membrures proximales du 2-RRR plan et le jeu dans les articulations rotoïdes passives génère un espace formé de l'intersection de deux anneaux, mais ceux-ci sont constitués d'une paire de cercles non-concentriques. Dans les deux cas : 1) jeu seul et 2) jeu + flexibilité, les rayons minimums et maximums des cercles, concentriques ou non, ont la même définition ($L_3 \pm \delta$ et $L_4 \pm \delta$).

La figure 4.11 illustre la procédure pour une des pattes. Le centre du cercle de rayon $L_3 - \delta$ (compression) et du cercle de rayon $L_3 + \delta$ (tension) sont obtenus en calculant la position du bout de la membrure 1 dans ses deux positions extrêmes, lorsqu'il est soumis à une force de flexion dont la valeur maximale est déterminée à l'avance. La même procédure est utilisée avec les membrures 2 et 4 de la deuxième chaîne cinématique pour obtenir l'autre paire de cercles. Pour choisir où placer le cercle ayant le plus petit rayon et le cercle ayant le plus grand rayon, il faut déterminer le choix qui résultera en un plus grand espace d'incertitude. C'est le centre du cercle ayant le plus petit rayon qui se trouve le plus loin de la position (x, y) de l'organe terminal et le centre du plus grand cercle qui est le plus près de la position (x, y) . On peut constater que l'espace

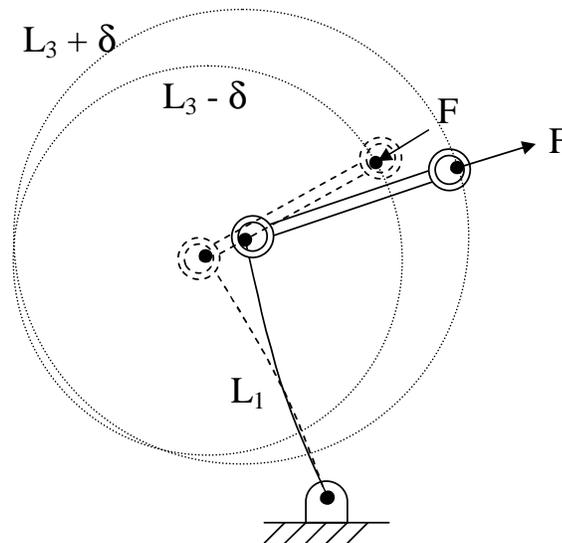


FIG. 4.11 – Modélisation de la flexion et du jeu.

d'incertitude (une fois les articulations immobiles) sera plus grand lorsque la flexibilité des membres soumis à de la flexion est considérée en plus du jeu dans les articulations passives, en raison des cercles non-concentriques.

Pour le manipulateur 3-RRR, on procède de la même façon, en obtenant l'intersection de trois paires de cercles non-concentriques, en discrétisant selon l'orientation ϕ .

4.5 La zone des singularités

L'espace d'incertitude dû au jeu et/ou à la flexibilité peut permettre à un manipulateur de se rendre dans une configuration singulière s'il y a intersection de la courbe des singularités et de l'espace d'incertitude, puisque le mouvement à l'intérieur de celui-ci n'est pas contrôlé ni choisi. À l'aide du 2-RPR plan, il est simple de démontrer comment le jeu dans les articulations passives influence l'étude des singularités. Lorsque ses deux pattes sont alignées, le 2-RPR plan ne peut ni appliquer ni résister à une force perpendiculaire à celles-ci. S'il y a du jeu aux articulations rotoïdes passives et que le manipulateur est assez près d'une configuration singulière (ses pattes sont presque alignées), il est possible que le 2-RPR plan atteigne une configuration singulière.

Cette situation est illustrée à la figure 4.12. La force F montrée, appliquée à l'organe terminal, va forcer le manipulateur à changer de solution (PGD) et les actionneurs prismatiques n'y pourront rien. Le point de départ, une configuration non-singulière du manipulateur fait donc partie d'une zone où une configuration singulière est possible. Il faut donc éviter de trop s'approcher des courbes des singularités.

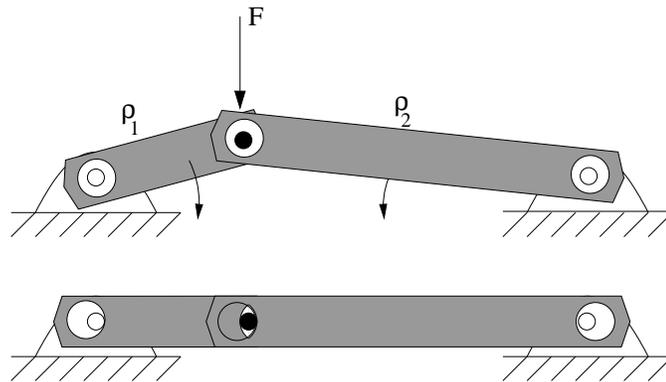


FIG. 4.12 – Un manipulateur 2-RPR plan en configuration singulière, en raison du jeu.

Au lieu d'éviter tout simplement la courbe des singularités dans la planification

de trajectoires, il devient important d'éviter la zone singulière. La méthode de détermination de la zone des singularités développée pour les manipulateurs du type \underline{RPR} et du type \underline{SPS} ne peut pas être appliquée aux manipulateurs de type \underline{RRR} , donc les deux méthodes sont présentées séparément, en commençant par la plus simple, pouvant s'appliquer à tous les manipulateurs dont les chaînes cinématiques sont du type \underline{RPR} ou \underline{SPS} .

4.5.1 Manipulateurs avec chaînes \underline{RPR} ou \underline{SPS}

Cette méthode de détermination de la zone des singularités est basée sur le principe suivant :

À un point A choisi de l'espace de travail d'un manipulateur \underline{RPR} ou \underline{SPS} , l'espace d'incertitude dû au jeu et/ou à la flexibilité est tracé et un point B se trouve à l'intérieur de cet espace d'incertitude. Si, à partir du point B, l'espace d'incertitude dû au jeu et/ou à la flexibilité est tracé, le point A va s'y trouver.

Ce principe est illustré à la figure 4.13. Un point A (croix rouge) a été choisi dans l'espace de travail d'un manipulateur à deux DDL et l'espace d'incertitude a été tracé en rouge. Un point B (croix bleue) compris à l'intérieur de l'espace d'incertitude en rouge a été choisi et l'espace d'incertitude correspondant a été tracé en bleu. Les points A et B sont tous deux compris à l'intérieur des deux espaces d'incertitude.

La solution au PGI du point A sera incluse dans l'intervalle $[\rho_i - \delta, \rho_i + \delta]$, $i=1,2$ (deux DDL) ou $i=1,2,3$ (trois DDL), obtenu à partir de la solution au PGI du point B et vice-versa.

Les manipulateurs 2- \underline{RPR} plan et le tripode (3- \underline{SPS} spatial) sont les seuls parmi les six étudiés pour lesquels il est possible d'obtenir analytiquement une courbe (2- \underline{RPR}) ou une surface (3- \underline{SPS}) délimitant la zone des singularités dans l'espace cartésien, puisqu'il est possible d'exprimer leurs singularités en fonction des variables articulaires. Les étapes à suivre sont les suivantes :

1. Exprimer les singularités dans le domaine articulaire
2. Ajouter ou soustraire δ à ρ_i , $i = 1, 2$ (2- \underline{RPR}) ou $i = 1, 2, 3$ (3- \underline{RPR})

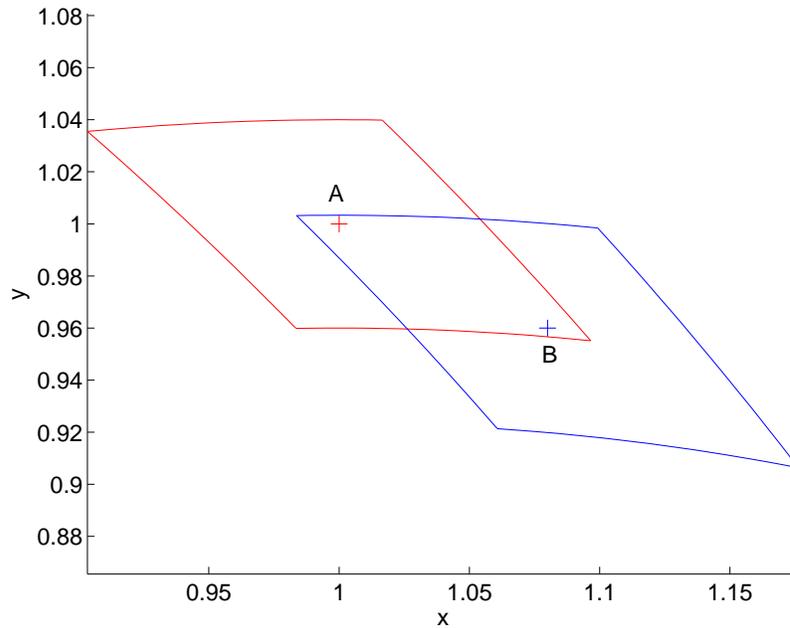


FIG. 4.13 – Deux points, A et B, chacun avec son espace d'incertitude.

3. Remplacer tous les ρ_i , $i = 1, 2$ (2-RPR) ou $i = 1, 2, 3$ (3-RPR) par les solutions au PGI
4. Dans le cas du 2-RPR, isoler y pour obtenir une fonction de x : $y = f(x)$
5. Dans le cas du 3-RPR, discrétiser x et y et appliquer une méthode numérique pour obtenir la valeur de z correspondante

Dans le cas du manipulateur à deux DDL, les équations s'obtiennent facilement. Si ses deux pattes sont attachées sur l'axe x (base fixe du manipulateur), la courbe des singularités (sans jeu et sans flexibilité) est représentée par l'équation $y = 0$. Sachant que les positions singulières du manipulateur correspondent à celles où les pattes sont parallèles et que les pattes sont attachées aux positions 0 et a (sur l'axe des x), on peut exprimer les singularités de la façon suivante, dans l'espace articulaire :

$$\begin{aligned}
 \rho_1 + \rho_2 &= a & \text{si } 0 \leq x \leq a \\
 \rho_1 - \rho_2 &= a & \text{si } x > a \\
 \rho_2 - \rho_1 &= a & \text{si } x < 0
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

La première étape de l'obtention analytique des zones singulières est d'exprimer les singularités à partir des coordonnées articulaires, tel qu'à l'équation (4.12). Pour ce manipulateur, l'obtention des équations de frontière des zones varie légèrement dans

les trois sections définies à la figure 4.14. Les sections sont délimitées par des droites perpendiculaires à la courbe des singularités, passant par les articulations fixes. Pour chaque section, il faut déterminer si c'est l'ajout ou le retrait de la valeur δ à la longueur de chaque patte qui va rapprocher le manipulateur d'une configuration singulière. Ceci fait partie de la deuxième étape.

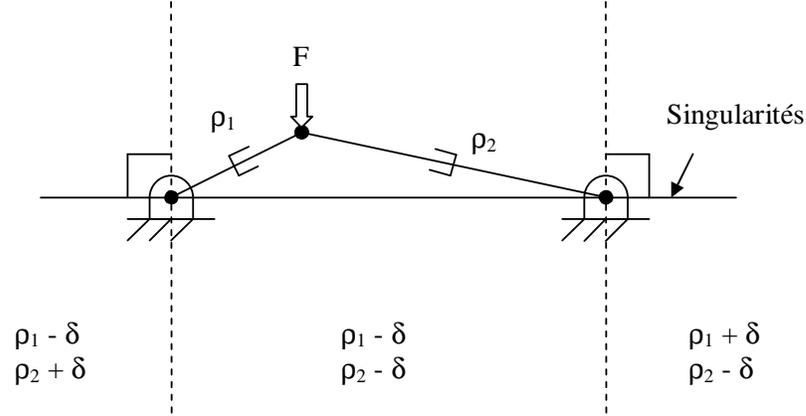


FIG. 4.14 – Les trois sections à considérer pour l'obtention des zones de singularités.

Il est indiqué dans la figure 4.14, pour chaque section, s'il faut ajouter ou soustraire δ . Pour terminer la deuxième étape, on transforme l'équation (4.12) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 (\rho_1 - \delta) + (\rho_2 - \delta) &= a & \text{si } 0 \leq x \leq a \\
 (\rho_1 + \delta) - (\rho_2 - \delta) &= a & \text{si } x > a \\
 (\rho_2 + \delta) - (\rho_1 - \delta) &= a & \text{si } x < 0
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

L'étape trois consiste à substituer ρ_1 et ρ_2 par les expressions obtenues pour les solutions au PGI, ce qui est fait à l'équation (4.14).

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{x^2 + y^2} - \delta) + (\sqrt{(x-a)^2 + y^2} - \delta) &= a & \text{si } 0 \leq x \leq a \\
 (\sqrt{x^2 + y^2} + \delta) - (\sqrt{(x-a)^2 + y^2} - \delta) &= a & \text{si } x > a \\
 (\sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \delta) - (\sqrt{x^2 + y^2} - \delta) &= a & \text{si } x < 0
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

La dernière étape consiste à isoler la variable y pour obtenir analytiquement la frontière de la zone des singularités, en fonction de x , en trois parties continues (équation (4.15)). La zone singulière est symétrique par rapport à l'axe des x ($y = 0$).

$$\begin{aligned}
 y &= \pm 2\sqrt{x^2(-\delta^2 - \delta a) + x(a\delta^2 + a^2\delta) + (a^2\delta^2 + 2\delta^3 a + \delta^4)/(2\delta + a)}, & 0 \leq x \leq a \\
 y &= \pm 2\sqrt{x^2(-\delta^2 + \delta a) + x(a\delta^2 - a^2\delta) + (a^2\delta^2 - 2\delta^3 a + \delta^4)/(2\delta + a)}, & \text{ailleurs}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Dans le cas du manipulateur à trois DDL, toutes les configurations singulières sont comprises dans le plan défini par les trois articulations sphériques fixes. Les équations sont plus simples si on choisit le plan $z = 0$, une articulation fixe à $(0, 0)$ et la deuxième sur l'axe x , $(a, 0)$. La troisième articulation peut prendre n'importe quelle position (b, c) , pourvu que $c \neq 0$. La zone des singularités comprend les configurations qui sont suffisamment près du plan $z = 0$ pour que le jeu et la flexibilité permettent au manipulateur d'atteindre ce plan. Dans le plan $z = 0$, la solution au PGI devient :

$$\begin{aligned}\rho_1 &= x^2 + y^2 \\ \rho_2 &= (x - a)^2 + y^2 \\ \rho_3 &= (x - b)^2 + (y - c)^2.\end{aligned}\tag{4.16}$$

À partir des deux premières lignes de l'équation (4.16), on peut obtenir des expressions pour x et y en fonction de ρ_1 et ρ_2 :

$$\begin{aligned}x &= \frac{\rho_1 - \rho_2 + a^2}{2a} \\ y &= \pm \left[\rho_1^2 - \left(\frac{\rho_1 - \rho_2 + a^2}{2a} \right)^2 \right]\end{aligned}\tag{4.17}$$

En substituant ces expressions pour x et y dans la dernière ligne de l'équation (4.16), on peut exprimer les singularités dans l'espace articulaire :

$$\rho_3^2 = \left[\frac{\rho_1^2 - \rho_2^2 + a^2}{2a} - b \right]^2 + \left[\pm \left(\rho_1^2 - \left(\frac{\rho_1 - \rho_2 + a^2}{2a} \right)^2 \right) - c \right]^2\tag{4.18}$$

où le signe \pm est celui de y . Ceci complète la première étape de l'obtention analytique des zones singulières.

À l'étape deux, le nombre d'équations passe de trois (manipulateur à deux DDL) à sept (manipulateur à trois DDL). Ces sept sections sont délimitées et identifiées à la figure 4.15. La figure montre le plan xy comprenant les trois points d'attache des pattes sur la base fixe du tripode. Trois droites passant chacune par deux articulations fixes divisent le plan en sept sections.

À cette étape, l'équation (4.18) est modifiée :

$$\begin{aligned}(\rho_3 \pm \delta)^2 &= \left[\frac{(\rho_1 \pm \delta)^2 - (\rho_2 \pm \delta)^2 + a^2}{2a} - b \right]^2 \\ &+ \left[\pm \left((\rho_1 \pm \delta)^2 - \left(\frac{(\rho_1 \pm \delta)^2 - (\rho_2 \pm \delta)^2 + a^2}{2a} \right)^2 \right) - c \right]^2.\end{aligned}\tag{4.19}$$

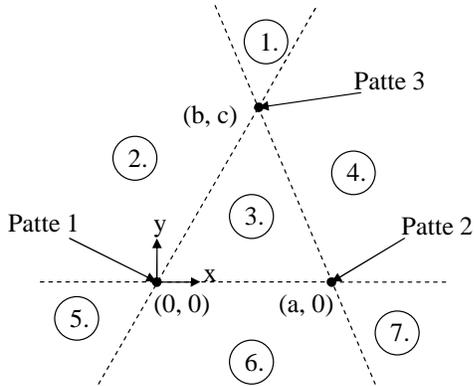


FIG. 4.15 – La base fixe du tripode dans le plan xy , divisée en sept sections.

Pour chaque section, il faut déterminer si c'est l'ajout ou le retrait de la valeur δ à la longueur de chaque patte qui va rapprocher le manipulateur d'une configuration singulière. Le tableau 4.1 montre pour chaque section le signe que doit prendre $\pm\delta$.

section	ρ_1	ρ_2	ρ_3	y
1.	$+\delta$	$+\delta$	$-\delta$	≥ 0
2.	$-\delta$	$+\delta$	$-\delta$	≥ 0
3.	$-\delta$	$-\delta$	$-\delta$	≥ 0
4.	$+\delta$	$-\delta$	$-\delta$	≥ 0
5.	$-\delta$	$+\delta$	$+\delta$	≤ 0
6.	$-\delta$	$-\delta$	$+\delta$	≤ 0
7.	$+\delta$	$-\delta$	$+\delta$	≤ 0

TAB. 4.1 – Signes à utiliser dans les équations (4.19-4.20).

L'étape trois consiste à substituer ρ_1 , ρ_2 et ρ_3 par les expressions obtenues pour les

solutions au PGI, lorsque $z \neq 0$:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{(x-b)^2 + (y-c)^2 + z^2 \pm \delta} \right)^2 = & \\ & \left[\frac{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 \pm \delta})^2 - (\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2 \pm \delta})^2 + a^2}{2a} - b \right]^2 \\ & + \left[\pm \left((\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 \pm \delta})^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 \pm \delta})^2 - (\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2 \pm \delta})^2 + a^2}{2a} \right)^2 \right) - c \right]^2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

La dernière étape consiste à obtenir numériquement la valeur de z aux points xy d'intérêt, ou à plusieurs points xy afin de représenter la zone des singularités dans l'espace de travail à l'aide d'un graphique. La zone singulière est symétrique par rapport au plan $z = 0$.

La méthode numérique choisie est dérivée de l'algorithme de Newton-Raphson. La méthode de la sécante remplace la dérivée de la fonction, nécessaire avec Newton-Raphson, par la pente obtenue à partir des valeurs calculées à deux points. La recherche d'une solution se fait à partir de l'équation (4.21), par itérations.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \quad (4.21)$$

S'il y a convergence, la solution est x_{n+1} lorsque $x_{n+1} - x_n$ est plus faible que la tolérance choisie. Dans le cas de l'équation (4.20) et des intervalles prévus, il y a toujours convergence. Ces méthodes sont retrouvées dans plusieurs livres d'analyse numérique, dont [106].

Dans le cas des deux autres manipulateurs à trois DDL avec actionneurs prismatiques, la zone des singularités sera représentée pour une seule tranche de l'espace 3D à la fois. Dans les résultats qui seront présentés et donc dans les méthodes proposées, voici le DDL qui demeurera constant pour chacun des manipulateurs :

3-RPR plan : l'orientation ϕ , qui est la rotation autour de l'axe z

3-SPS sphérique : la torsion σ , qui est la rotation autour de l'axe z mobile

La procédure qui suit peut être appliquée de la même façon aux deux manipulateurs à trois DDL énumérés ci-dessus. Le manipulateur 3-RPR plan est choisi pour

l'explication de la procédure. L'objectif est d'obtenir la zone des singularités lorsqu'une orientation constante est choisie. Toutefois, puisque l'espace d'incertitude dû au jeu et à la flexibilité permet un mouvement en 3D : translation dans le plan xy et une rotation ϕ , il faut tenir compte de cette dernière lors de la détermination de la zone des singularités.

La figure 4.16 montre un espace d'incertitude discrétisé selon ϕ et chaque tranche tracée est l'espace d'incertitude à orientation constante. Celle qui est montrée en rouge est la tranche correspondant à l'orientation constante choisie. Un point $xy\phi$ choisi fait partie de la zone des singularités si l'espace d'incertitude 3D intersecte la surface des singularités (montrée en vert). Il faut tenir compte de la rotation possible, due au jeu et à la flexibilité, de la plate-forme mobile dans l'obtention de la zone des singularités.

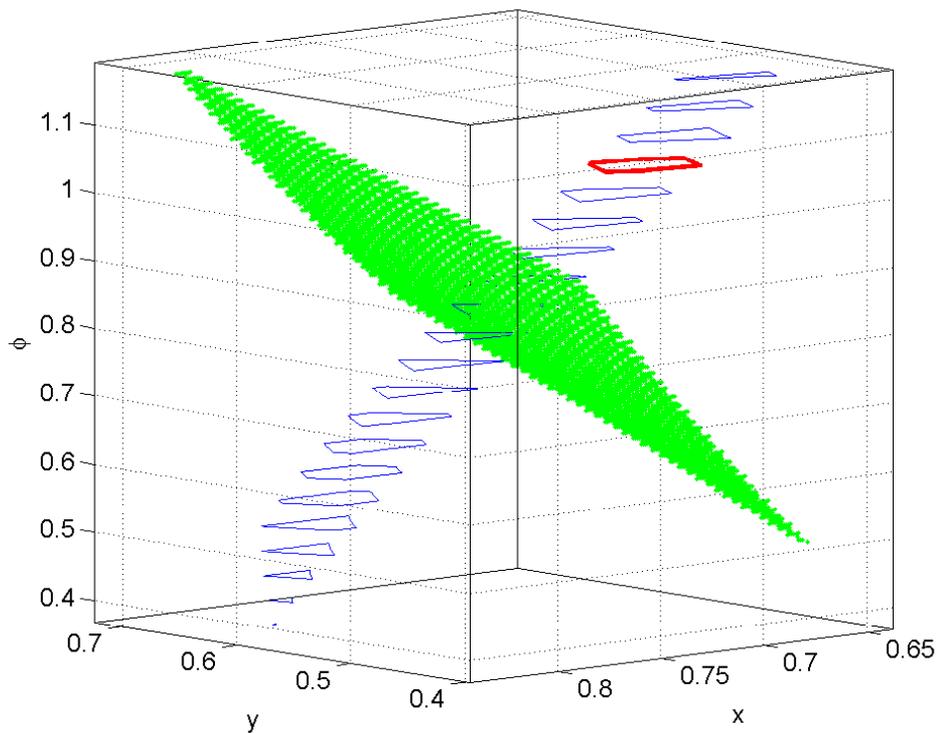


FIG. 4.16 – Intersection de l'espace d'incertitude et des singularités.

Une orientation constante est premièrement choisie, ensuite la zone des singularités est obtenue. Cette zone contiendra toutes les positions xy permettant d'atteindre une

singularité à l'orientation choisie tout en tenant compte de l'espace d'incertitude en 3D. Pour tous les manipulateurs avec chaînes du type RPR présentés, la recherche de la zone se fait à partir des courbes (2D) ou à partir des surfaces (3D) singulières. Ainsi, tout au long de la procédure, tous les espaces d'incertitude sont obtenus à partir d'un point qui est une configuration singulière.

Selon le principe énoncé au début de la présente section, si l'espace d'incertitude obtenu à partir d'un point A (une configuration singulière) contient un point B, l'espace d'incertitude obtenu à partir du point B contiendra le point A, qui est une configuration singulière. Le point B fait donc partie de la zone des singularités. De plus, si l'espace d'incertitude obtenu à partir d'un point A (une configuration singulière) contient une tranche à une orientation ϕ , l'espace d'incertitude obtenu à partir de n'importe quel point de cette tranche contiendra la configuration singulière A. Toute la tranche fait donc partie de la zone singulière.

Les étapes de la procédure sont présentées dans la figure 4.18. À l'orientation constante choisie (ϕ_{cons}), la courbe des singularités est obtenue puis discrétisée pour générer une liste de points (x_i, y_i) $i = 1...n$. Pour chacun de ceux-ci, la longueur des pattes ρ_1 , ρ_2 et ρ_3 est calculée. Les n espaces d'incertitude à orientation constante, dus au jeu et à la flexibilité, sont déterminés et tracés. L'union de ces petits espaces qui contient la courbe des singularités forme une partie de ce qui deviendra la zone singulière du manipulateur. À ce moment-ci, la rotation possible due au jeu et à la flexibilité n'a pas encore été considérée. La figure 4.17 montre ce résultat préliminaire pour un manipulateur plan à trois DDL, le 3-RPR. La courbe des singularités est montrée en vert et les espaces d'incertitude à orientation constante, obtenus à partir de points sur cette courbe sont montrés en rouge.

Les étapes qui suivent, répétées dans une boucle, complètent petit à petit la zone singulière, en faisant varier ϕ , afin de considérer tout l'espace d'incertitude (3D).

Cette boucle est répétée à deux reprises à partir de $\phi = \phi_{cons}$: une fois en incrémentant ϕ vers le haut ($\phi = \phi + \Delta\phi$) et une autre fois vers le bas ($\phi = \phi - \Delta\phi$). Pour chaque nouvelle valeur de ϕ , la courbe des singularités correspondante est obtenue puis discrétisée pour générer une liste de points (x_i, y_i) $i = 1...n$. Pour chacun de ceux-ci, la longueur des pattes ρ_1 , ρ_2 et ρ_3 est calculée. Au lieu d'obtenir l'espace d'incertitude à orientation constante, ce sont les espaces d'incertitude 3D qui sont déterminés. Un tel

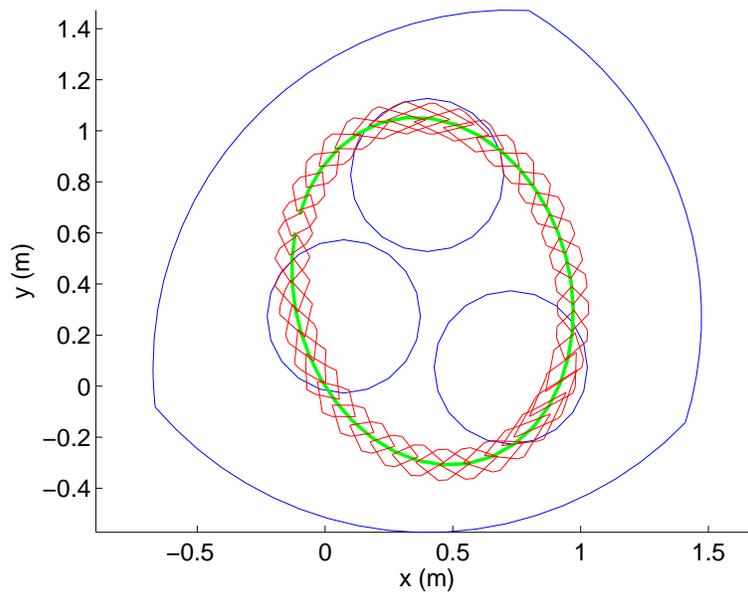


FIG. 4.17 – Début de la formation de la zone des singularités, selon la méthode présentée.

espace a été montré aux figures 4.6 et 4.16.

Si l'orientation ϕ_{cons} est incluse dans l'espace 3D, cette tranche seulement est tracée et participe à la formation de la zone singulière du manipulateur. C'est l'ensemble de toutes les configurations pouvant atteindre une singularité, lorsque ϕ prend la valeur choisie qui est le résultat recherché à la fin de l'algorithme. Les autres tranches de l'espace d'incertitude n'ont pas d'intérêt.

Si, pour la présente valeur de ϕ , au moins une tranche ($\phi = \phi_{cons}$) d'un des n espaces d'incertitudes 3D a été tracée, ϕ est incrémenté et la procédure continue. Dans le cas contraire, on s'arrête.

Le même algorithme s'applique au manipulateur sphérique, mais avec les substitutions suivantes :

1. L'orientation est remplacée par la torsion (ϕ est remplacé par σ)
2. Les points xy sont remplacés par les points $\theta\phi$ (inclinaison et azimuth)

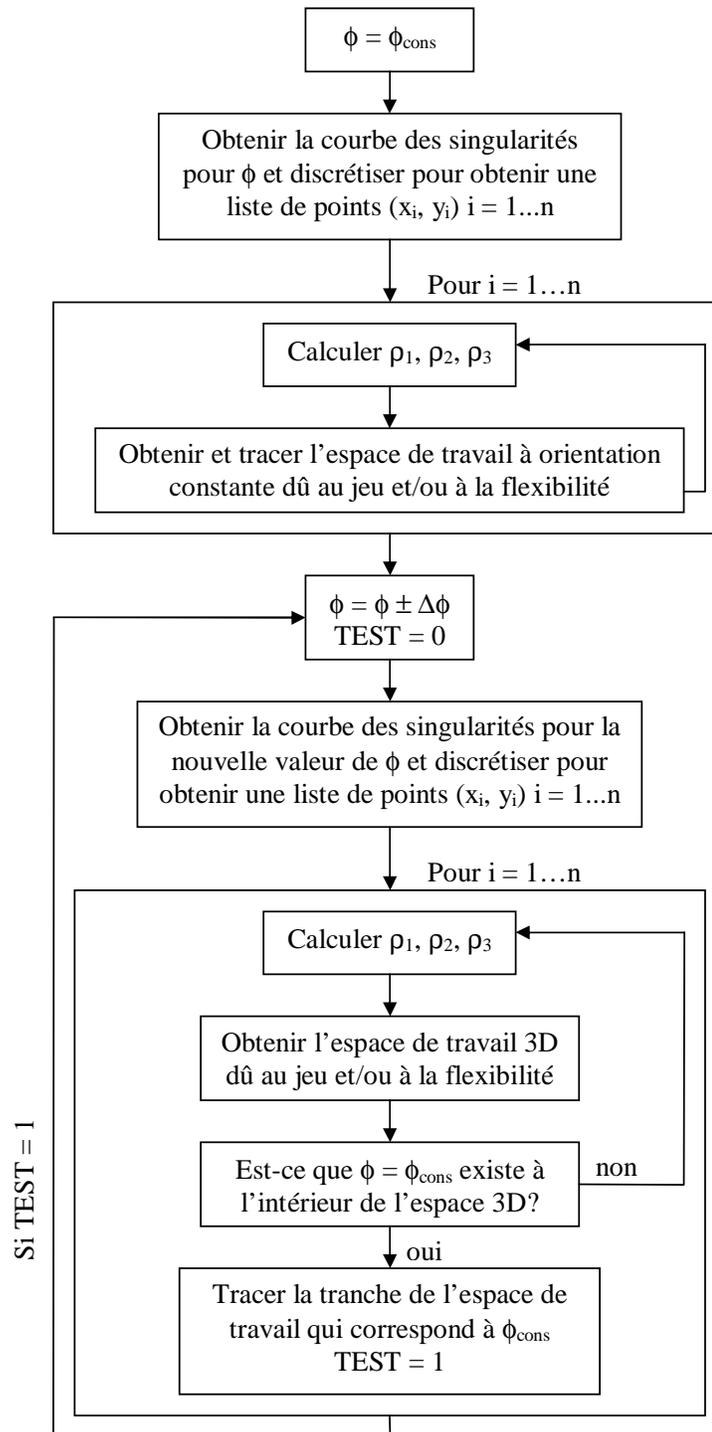


FIG. 4.18 – Algorithme pour la détermination de la zone des singularités du manipulateur 3-RPR plan.

4.5.2 Manipulateurs avec chaînes RRR

Pour ces manipulateurs, la dernière phrase du principe énoncé précédemment n'est plus vraie : À un point A choisi de l'espace de travail d'un manipulateur RPR ou SPS, l'espace d'incertitude dû au jeu et/ou à la flexibilité est tracé et un point B se trouve à l'intérieur de cet espace d'incertitude. Si, à partir du point B , l'espace d'incertitude dû au jeu et/ou à la flexibilité est tracé, le point A va s'y trouver. Lorsque les actionneurs des manipulateurs à chaînes RRR sont immobiles, le mécanisme équivalent à chaînes RPR utilisé pour tracer l'espace d'incertitude dû au jeu et à la flexibilité n'est pas le même aux points A et B . La solution au PGI du point A n'est peut-être pas incluse dans l'intervalle $[\rho_i - \delta, \rho_i + \delta]$, $i=1,2$ (deux DDL) ou $i=1,2,3$ (trois DDL) obtenu à partir de la solution au PGI du point B et vice-versa.

Pour obtenir la zone des singularités, il faut discrétiser l'espace de travail. Le résultat final est un nuage de points formant la zone des singularités. Voici les étapes de la méthode développée pour obtenir la zone des singularités du 2-RRR :

1. Choisir une seule des quatre solutions au PGI et la garder pour toutes les étapes suivantes
2. Discrétiser l'espace atteignable du manipulateur selon x et y pour obtenir une liste de points xy
3. À chacun des points xy , obtenir l'espace d'incertitude dû au jeu et à la flexibilité
4. Vérifier s'il y a intersection de l'espace d'incertitude avec les lieux de singularités : utiliser la méthode basée sur le déterminant de la matrice jacobienne pour vérifier s'il s'y trouve une courbe des singularités
 - Dans l'affirmative : le point xy fait partie de la zone des singularités, passer au point xy suivant

Les étapes 2, 3 et 4 sont illustrées à la figure 4.19. Un maillage très grossier a été choisi dans le seul but d'aider à la compréhension. Les croix bleues sont les points obtenus par la discrétisation de l'espace de travail. Ceux qui se trouvent à l'intérieur de l'espace sont utilisés pour les étapes 3 et 4. Les espaces d'incertitudes sont tracés en rouge. À la fin de la procédure, les points suivants (ligne, colonne) sont enregistrés et font partie de la zone des singularités : $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$, $(4, 2)$, $(4, 4)$.

La méthode développée pour obtenir la zone des singularités du 3-RRR est sem-

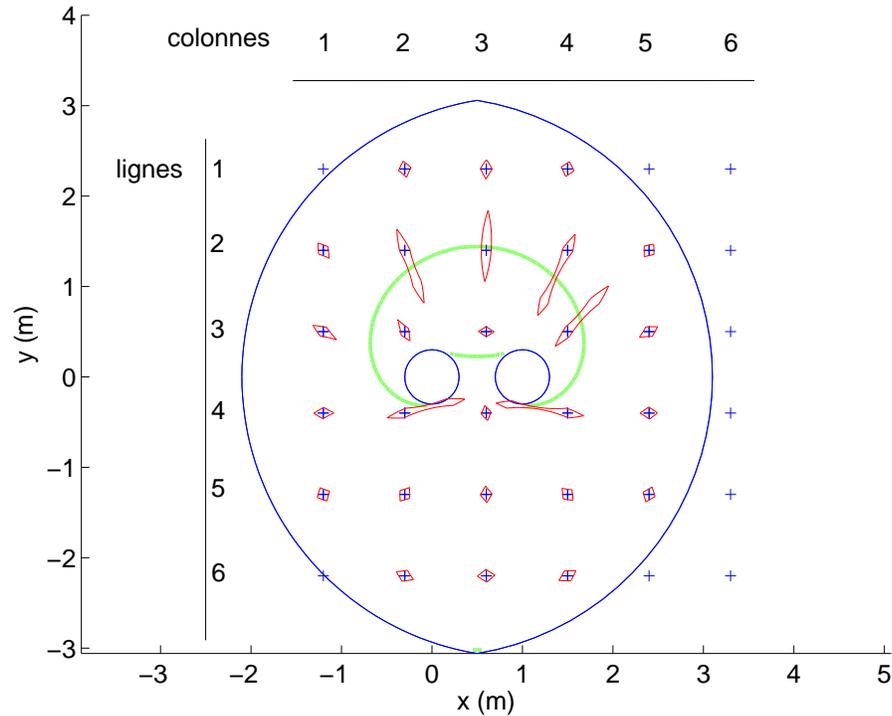


FIG. 4.19 – Choix des points formant la zone des singularités.

blable, mais comprend quelques ajouts. Voici les étapes :

1. Choisir une seule des huit solutions au PGI et la garder pour toutes les étapes suivantes
2. Choisir l'orientation constante voulue
3. Discrétiser l'espace de travail à orientation constante selon x et y pour obtenir une liste de points xy
4. À chacun de ces points, obtenir l'espace d'incertitude 3D ($xy\phi$) dû au jeu et à la flexibilité, discrétisé selon ϕ
5. Pour chaque tranche de l'espace d'incertitude, vérifier s'il y a intersection avec les lieux de singularités :
 - À chaque tranche ($\phi = \text{constante}$) de l'espace d'incertitude 3D, utiliser la méthode basée sur le déterminant de la matrice jacobienne pour vérifier s'il s'y trouve une courbe des singularités (les singularités sont différentes à chaque tranche)
 - Dans l'affirmative : le point xy fait partie de la zone des singularités, passer

au point xy suivant

- Sinon, continuer à vérifier les autres tranches de l'espace d'incertitude jusqu'à ce qu'on y retrouve un point de la courbe des singularités ou jusqu'à la dernière tranche.

Les étapes 4 et 5 sont plus facilement comprises en regardant une figure présentée précédemment, la figure 4.16. À ces étapes, l'espace d'incertitude est obtenu à partir d'un point situé dans la tranche en rouge. En commençant par cette tranche et en vérifiant les autres, en s'éloignant de la première, l'intersection avec les singularités est vérifiée avec la méthode présentée à la section 3.4.1. Si une intersection est trouvée, le point de départ de la tranche en rouge est enregistré. Tout au long de la procédure, les tranches en rouge correspondent toutes à l'orientation constante voulue (étape 2). Le résultat final sera un nuage de points xy formant la zone des singularités à l'orientation constante choisie.

4.6 La variation des propriétés cinématiques

En plus de permettre des erreurs (position et/ou orientation) et de générer des zones singulières, le jeu et la flexibilité vont produire une dégénérescence possible des propriétés cinématiques, telles que la dextérité et la raideur. Dans ce texte, le terme *dextérité* désigne l'inverse du conditionnement de la matrice jacobienne, un indice borné entre 0 et 1. La méthode proposée est de vérifier ces propriétés cinématiques sur les frontières des espaces d'incertitude et d'enregistrer la moins bonne valeur calculée.

Afin que cette méthode soit admissible, il faut s'assurer de connaître certaines caractéristiques de la variation de la dextérité et de la variation de la raideur du manipulateur dans l'ensemble de son espace de travail. Dans la figure 4.20, tel que dans toutes celles présentant la dextérité ou la raideur dans ce travail, on remarque une même propriété qui est essentielle pour obtenir des résultats utiles avec la méthode présentée : peu importe le point choisi dans l'espace de travail, une évaluation des propriétés cinématiques environnantes montre qu'il y a toujours une direction selon laquelle les propriétés se détériorent en s'éloignant du point choisi.

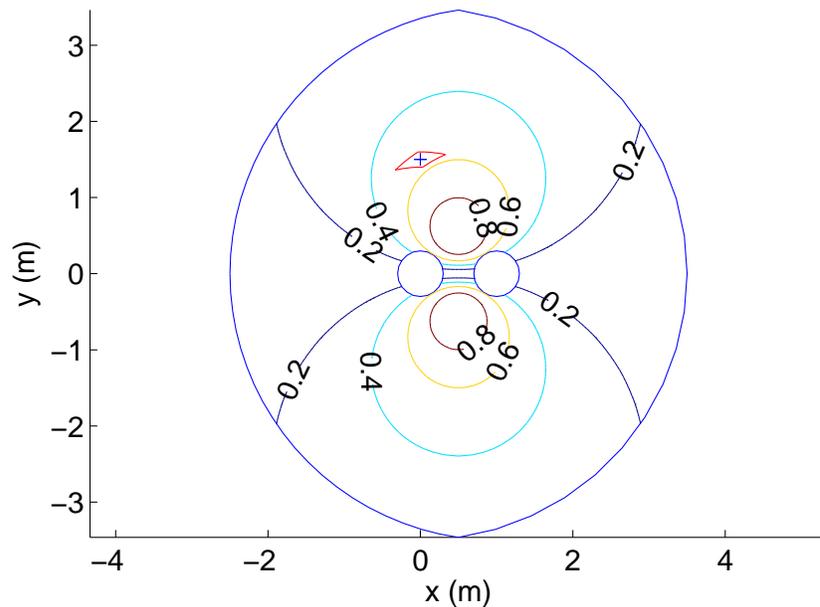


FIG. 4.20 – Variation de la dextérité dans l'espace de travail du manipulateur 2-RPR plan.

La même figure contient un point (croix bleue) et l'espace d'incertitude obtenu à partir de celui-ci. La figure 4.21 montre l'espace d'incertitude de la figure 4.20, les courbes d'isodextérité et l'emplacement de la valeur minimum obtenue, qui se trouve sur la frontière de l'espace.

Ceci permet de vérifier les frontières seulement de l'espace d'incertitude dû au jeu et à la flexibilité pour retrouver la pire dégénérescence possible des propriétés cinématiques à un point choisi, ce qui est l'objectif visé.

Dans les chapitres 5 et 6 la recherche de la dégénérescence des propriétés cinématiques se fait pendant l'obtention de l'espace d'incertitude, en effectuant les calculs de la dextérité et de la raideur sur les frontières obtenues. La dextérité calculée est l'inverse du conditionnement de la matrice \mathbf{J}' de l'équation (3.118). La raideur est calculée à partir de l'équation (3.119), qui ne comprend pas la déformation due à un torseur connu. On tient compte de la déformation due à un torseur inconnu en considérant la flexibilité des membrures pour l'obtention de l'espace d'incertitude.

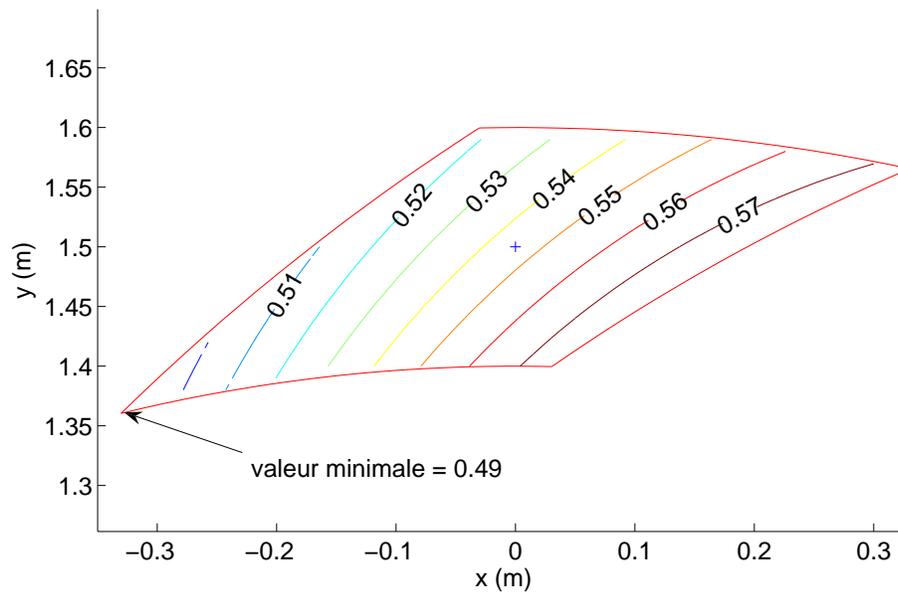


FIG. 4.21 – Variation de la dextérité dans un espace d’incertitude du manipulateur 2-RPR plan.

4.7 Sommaire

Des algorithmes ont été présentés pour l’obtention des zones singulières. Ceux-ci diffèrent selon les chaînes cinématiques qui constituent les pattes d’un manipulateur. L’obtention des espaces d’incertitudes dus au jeu retrouvé aux articulations rotoïdes passives et à la flexibilité des articulations et des membrures est une partie importante de chaque algorithme.

Toutes les membrures des manipulateurs avec actionneurs prismatiques sont soumises à des forces de compression et de tension seulement, ce qui simplifie la modélisation de l’effet du jeu et de la flexibilité. Pour les manipulateurs avec actionneurs rotoïdes, il est possible d’obtenir des manipulateurs équivalents avec actionneurs prismatiques pour une posture choisie (actionneurs immobiles). On peut alors obtenir l’espace d’incertitude dû au jeu pour le manipulateur équivalent. Pour inclure la flexion qui est présente dans les membrures proximales des manipulateurs avec actionneurs rotoïdes, il faut adapter l’algorithme de détermination de l’espace d’incertitude, tel qu’il a été présenté dans ce chapitre.

Chapitre 5

Résultats pour des manipulateurs avec articulations prismatiques actionnées

Parmi les manipulateurs étudiés, quatre ont des articulations prismatiques actionnées. Les résultats obtenus pour les autres manipulateurs se trouvent au prochain chapitre. Ce chapitre contient une étude de l'erreur de positionnement et/ou d'orientation de l'organe terminal, l'obtention de la distribution des espaces d'incertitudes qui existent en raison du jeu et de la flexibilité, l'obtention des zones des singularités et la dégradation possible des propriétés cinématiques, selon les méthodes présentées au chapitre précédent. De plus, une comparaison de l'erreur (position et/ou orientation) et des propriétés cinématiques est présentée.

5.1 Manipulateur plan à deux DDL

L'architecture choisie pour ce manipulateur est définie par deux vecteurs : $\mathbf{r}_1 = [0 \ 0]^T$ et $\mathbf{r}_2 = [1 \ 0]^T$. Les pattes (articulations prismatiques) sont attachées à la base, au bout des vecteurs. La figure 5.1 montre l'espace d'incertitude lorsque les actionneurs sont immobiles et ce, pour plusieurs points (x, y) .

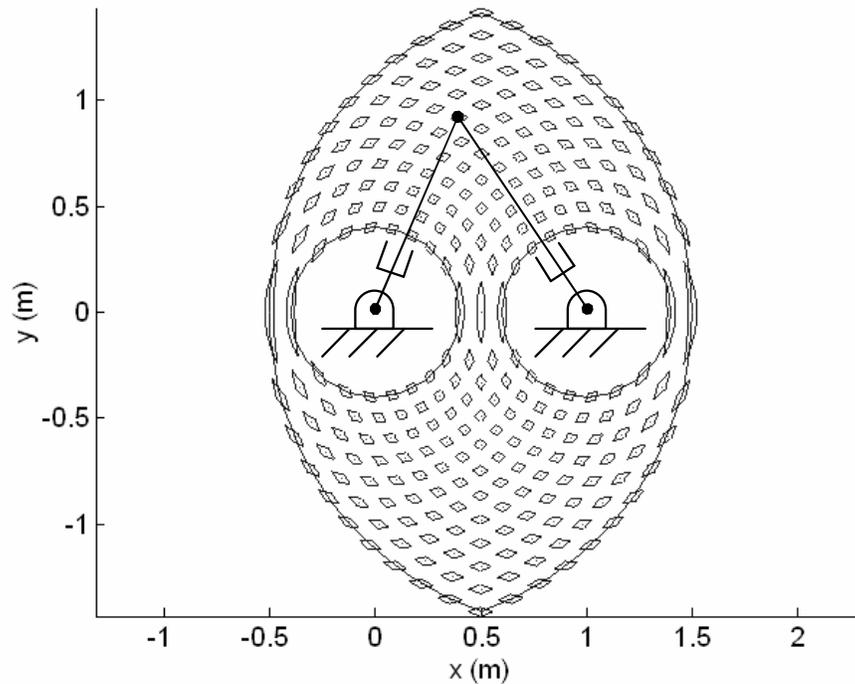


FIG. 5.1 – Espace d'incertitude dû au jeu dans les articulations.

Il est important de préciser que le plus petit espace d'incertitude permis par les jeux se trouve au point $x = y = 0,5$ m, ce qui correspond aussi à la position de la dextérité maximale, qui est isotrope dans ce cas. Les deux pattes ont la même longueur et forment un angle de 90° . Les espaces d'incertitudes permis par les jeux sont plus grands lorsque le manipulateur est en configuration singulière ($y = 0$ m), correspondant à une dextérité nulle.

5.1.1 Erreur de position

L'exemple suivant sert à illustrer à la fois l'effet de la flexibilité et celui du jeu sur l'erreur de position du manipulateur étudié dans cette section. Une trajectoire est imposée à l'organe terminal et une force sinusoïdale lui est appliquée. Pour la simplicité, la valeur de x est fixée à 0,5 m lors de la trajectoire (donc $\rho_1 = \rho_2$) et la force dans la direction x est nulle. La force appliquée dans la direction y est :

$$F_y = F \sin(4\pi t + \pi/2) \text{ N}, \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ s} \quad (5.1)$$

où la valeur de F est de 2000 N. La valeur de y varie selon :

$$y = (0,4 + t) \text{ m}, \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ s} \quad (5.2)$$

La figure 5.2 montre la valeur voulue de y et la valeur réelle obtenue si la force F_y montrée dans la figure est appliquée et si la somme des jeux dans chaque chaîne cinématique est de 0,02 m. Une valeur de 20 000 N/m a été choisie pour k_1 et k_2 qui sont la raideur des deux pattes, respectivement. Dans la figure, la force change de signe lorsque sa courbe intersecte la ligne horizontale verte. À ces intersections, une ligne verticale pointillée a été ajoutée afin qu'il soit plus facile de voir l'effet du changement de signe sur la trajectoire réelle.

Les deux causes de l'erreur de position peuvent être distinguées l'une de l'autre. Il est possible de voir la dépendance du sens de l'erreur de position due au jeu au sens de la force (l'erreur change de signe en même temps que la force) et de la grandeur de l'erreur de position à la grandeur de la force appliquée (la forme du déplacement simulé). En début de trajectoire, l'erreur de position est plus sensible à la force, puisque la raideur selon l'axe y est plus faible. La variation de la raideur est montrée à la section 5.1.3, dans la figure 5.9.

Pour une tâche prévue à l'avance, qui requiert une très grande précision et où les forces qui seront appliquées sont connues, il est possible de prévoir les erreurs et de compenser en partie celles-ci en ajustant légèrement la trajectoire. Par contre, cette thèse n'est pas rattachée à une situation ou une tâche particulière et sera orientée autrement. Dans tout ce qui va suivre, c'est la plus grande erreur ou la plus grande dégénérescence possible qui est calculée, étant donné la plus grande déformation possible du manipulateur, due au jeu et à la flexibilité.

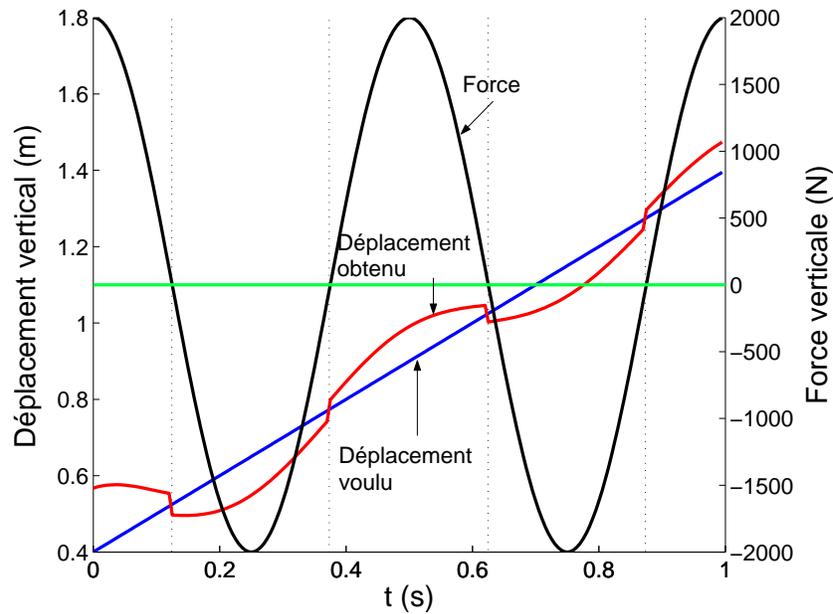


FIG. 5.2 – Effet de la flexibilité et du jeu sur la position.

Sans connaître le sens des forces qui seront appliquées, on peut obtenir les plus grandes erreurs de position possible en choisissant une valeur de δ qui comprendra les plus grandes déformations prévues. Les figures 5.3 et 5.4 montrent la variation totale de la position, la première selon l'axe x (horizontal) et la deuxième selon l'axe y (vertical), lorsque $\delta = 0,02$ m.

Une comparaison des deux cas montre que les erreurs n'ont pas la même distribution dans l'espace de travail du manipulateur. L'orientation du manipulateur par rapport à sa surface de travail devra donc être choisie selon les contraintes de la tâche à accomplir. Dans le cas des chaînes cinématiques du type RPR et du type SPS, les longueurs minimum et maximum des pattes n'ont aucune influence ni sur les lieux de singularité, ni sur les propriétés cinématiques. Les limites de l'espace de travail ne sont donc pas incluses.

5.1.2 Zones de singularité et dextérité

La zone des singularités comprend toutes les positions de l'organe terminal qui pourraient permettre au manipulateur de se rendre dans une configuration singulière,

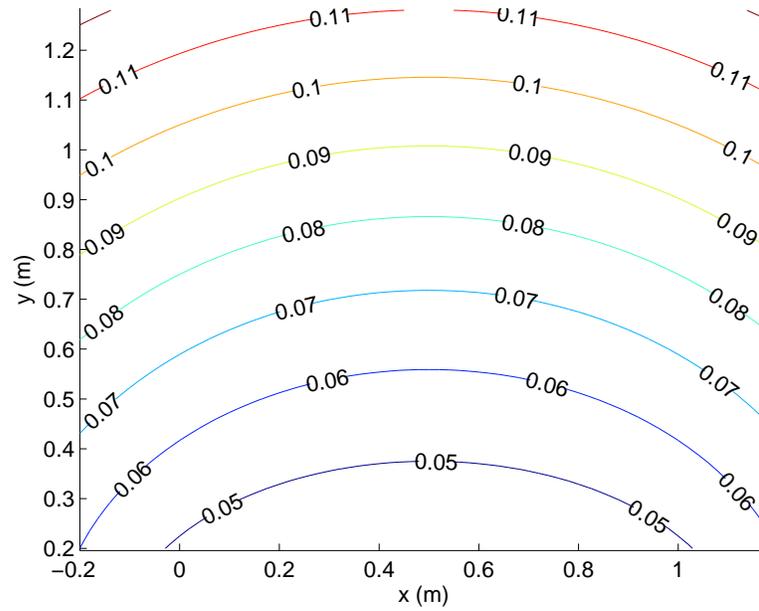


FIG. 5.3 – Variation totale de position selon l'axe x , pour $\delta = 0,02$ m.

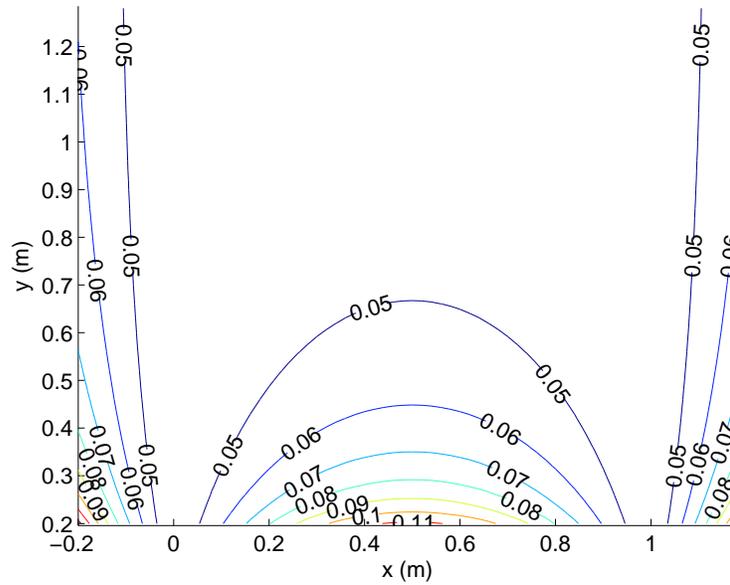


FIG. 5.4 – Variation totale de position selon l'axe y , pour $\delta = 0,02$ m.

si les forces appliquées (grandeur et sens) sont adéquates. En dehors des limites de cette zone, il n'y a pas de singularités, peu importe les forces impliquées, dans les limites prévues.

La zone des singularités ainsi que les dégénérescences possible des propriétés cinématiques seront plus grandes si :

- les forces maximales sont plus élevées
- les raideurs sont plus faibles
- les jeux sont plus grands

Dans tous les résultats présentés, pour les manipulateurs ayant des chaînes cinématiques du type RPR ou du type SPS, les trois influences énumérées précédemment sont incluses dans une même variable δ , décrite dans le chapitre précédent. Pour ces manipulateurs, il est équivalent d'augmenter la valeur du jeu pour inclure la flexibilité. La figure 5.5 montre de quelle façon l'étendue de la zone des singularités est influencée par la grandeur du jeu aux articulations passives. La droite $y = 0$ m représente les singularités en absence de jeu et la zone s'agrandit autour de celle-ci lorsque les jeux augmentent. Les arcs de cercle, en bleu, sont les limites de l'espace de travail.

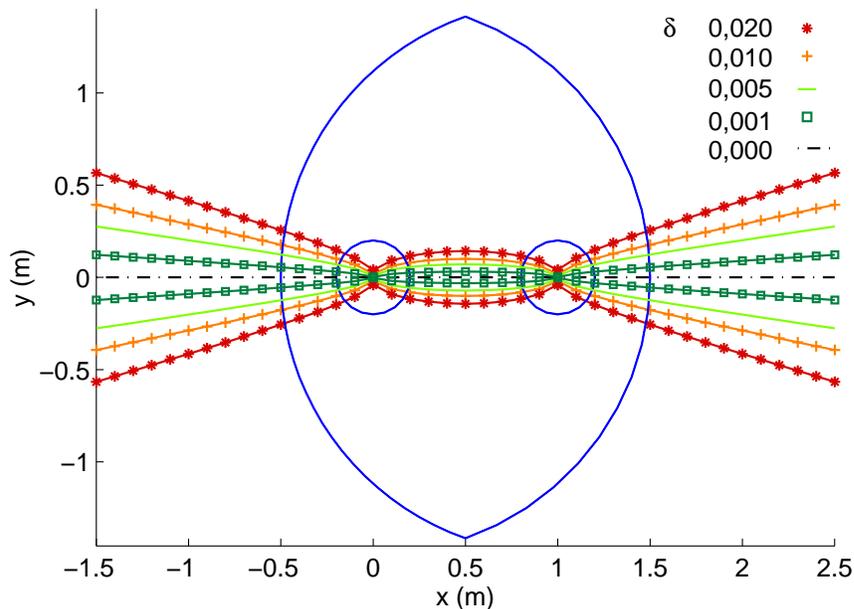


FIG. 5.5 – Effet de la grandeur du jeu sur l'étendue de la zone des singularités.

La figure 5.6 montre les isodextérités du manipulateur. On retrouve deux courbes

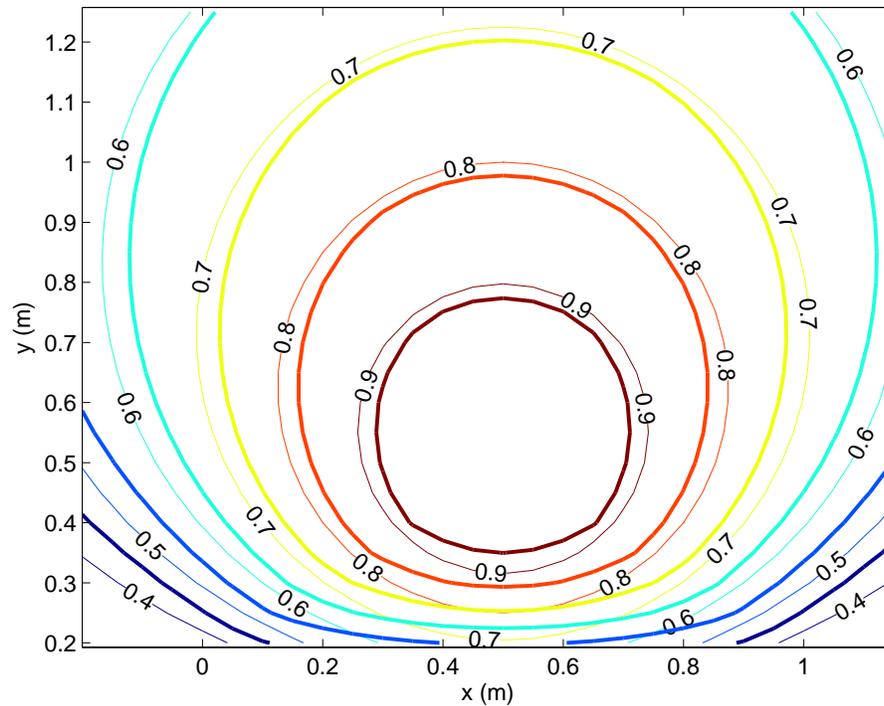


FIG. 5.6 – Comparaison de la dextérité avec $\delta = 0,02$ m et sans jeu.

pour chacune des valeurs d'isodextérité : une pour la dextérité sans jeu et l'autre pour une valeur $\delta = 0,02$ m (lignes plus épaisses). Par exemple, si on juge qu'une tâche requiert une dextérité d'au moins 0,6, une plus petite partie de l'espace de travail du manipulateur sera adéquate. Le même résultat peut être présenté autrement.

À la figure 5.7 c'est la dégradation possible de la dextérité qui est présentée pour la même valeur de $\delta = 0,02$ m. La dégradation de la dextérité est la perte possible de dextérité : la différence entre la dextérité calculée sans jeu et la dextérité minimale calculée dans l'espace d'incertitude. La dégradation obtenue est plus faible loin de la zone des singularités.

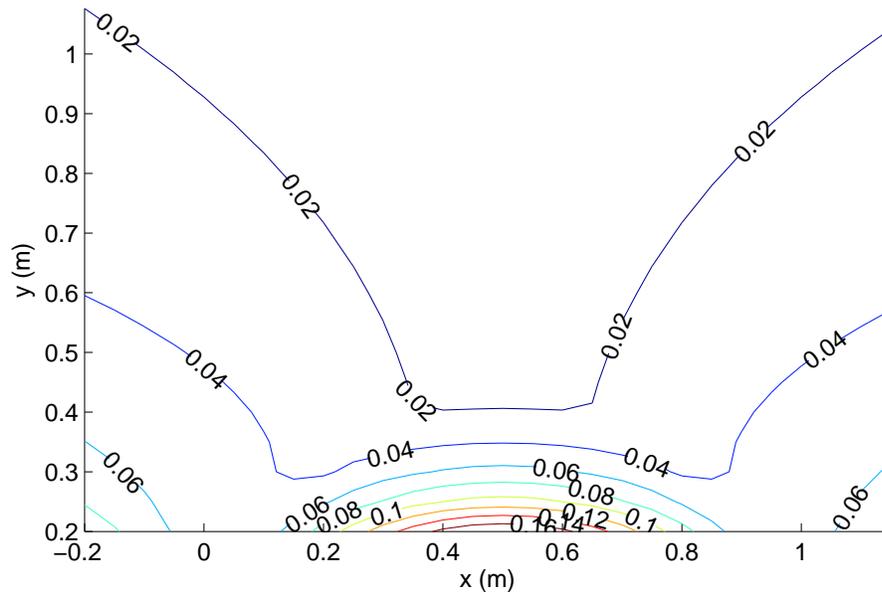


FIG. 5.7 – Dégradation possible de la dextérité avec $\delta = 0,02$ m.

5.1.3 Dégradation de la raideur

Pour une tâche connue, la distribution de la raideur d'un manipulateur à l'intérieur de son espace de travail selon un ou plusieurs axes peut être importante. Dans les résultats présentés, la distribution de la raideur ainsi que distribution de la sensibilité à l'effet du jeu n'est pas la même selon l'axe choisi. Bien que le jeu puisse avoir l'effet d'augmenter la raideur dans certains cas, c'est la pire dégénérescence qui est présentée dans tous ce qui suit. La figure 5.8 montre les isoraideurs du manipulateur selon l'axe x et ce, avec (lignes plus épaisses) et sans jeu ($\delta = 0,02$ et $\delta = 0$ m). La figure 5.9 montre les isoraideurs du manipulateur selon l'axe y pour les mêmes valeurs de δ . L'allure des courbes est très différente dans les deux cas, puisque l'angle de chacune des pattes dans le plan xy influence directement la raideur selon les axes x et y .

L'effet de la grandeur du jeu est montrée à la figure 5.10, en comparant la dégénérescence possible de la raideur selon l'axe x pour les valeurs $\delta = 0,02$ et $\delta = 0,04$ m. La dégénérescence de la raideur est la perte possible de raideur : la différence entre la raideur calculée sans jeu et la raideur minimale calculée dans l'espace d'incertitude. Si on double la grandeur de δ , cela ne va pas exactement doubler la dégénérescence

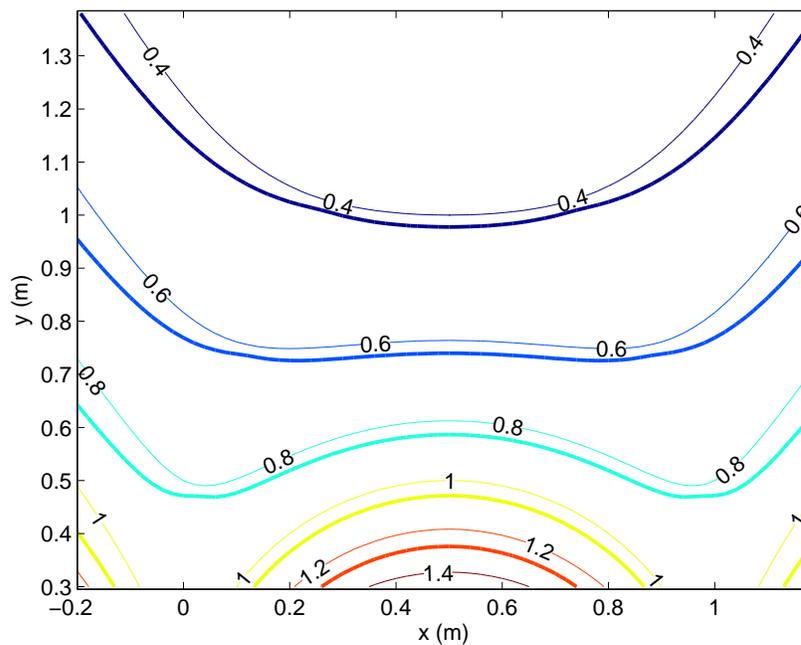


FIG. 5.8 – Comparaison de la raideur selon l'axe x avec $\delta = 0,02$ m et sans jeu.

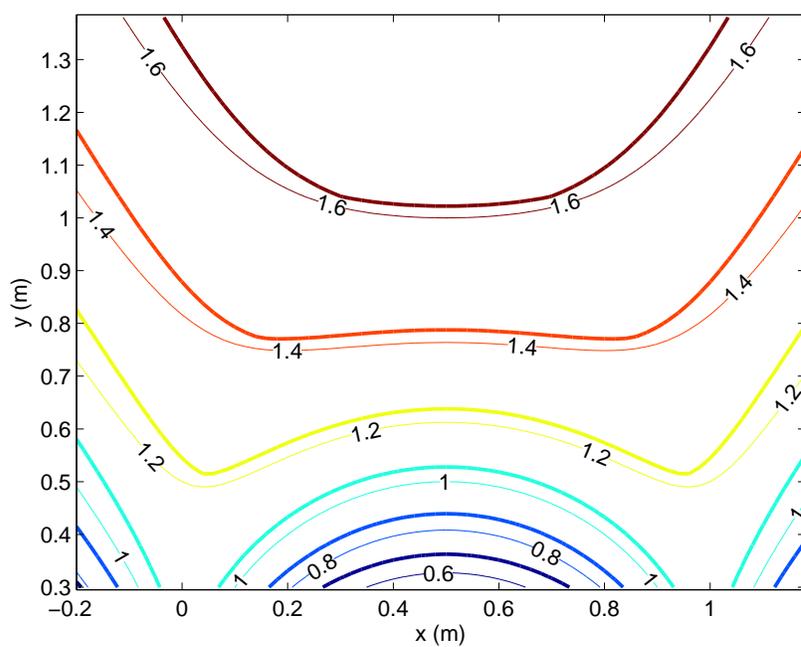


FIG. 5.9 – Comparaison de la raideur selon l'axe y avec $\delta = 0,02$ m et sans jeu.

possible, mais cette approximation serait acceptable dans la plupart des cas.

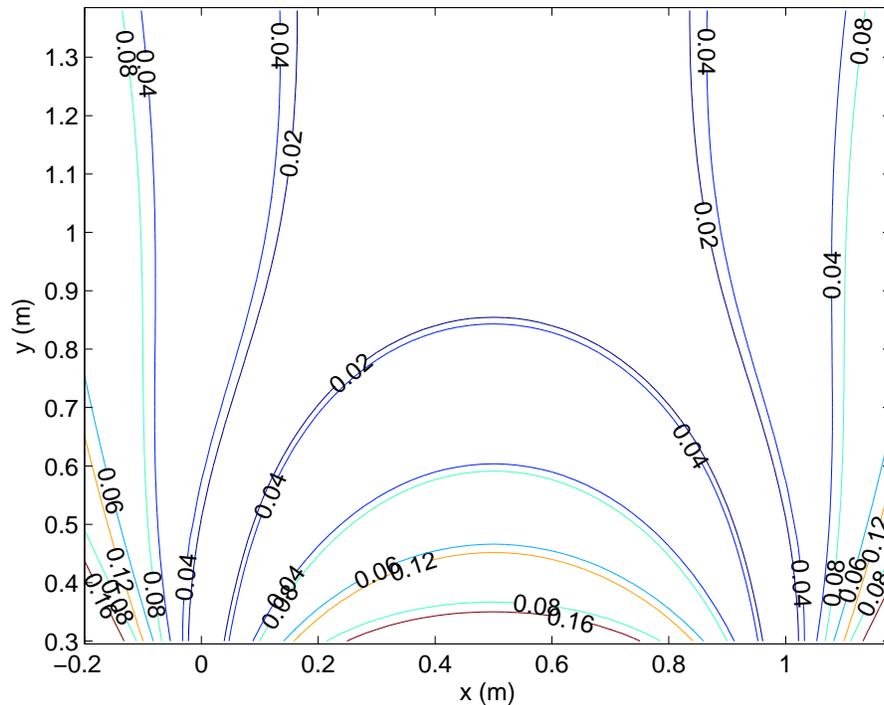


FIG. 5.10 – Comparaison de la dégradation de la raideur selon l'axe x lorsque $\delta = 0,02$ et $\delta = 0,04$ m.

5.1.4 Comparaison de la distribution de l'erreur et de la dextérité

L'espace de travail du 2-RPR a été discrétisé de la façon suivante pour un total de 1891 points :

$$\begin{aligned} x &= 0,0 : 0,01 : 0,6 \text{ m} \\ y &= 0,3 : 0,01 : 0,6 \text{ m} \end{aligned} \quad (5.3)$$

À tous ces points, l'erreur maximale (due à un jeu $\delta = 0,02$ m) et la dextérité ont été calculés. La figure 5.11 montre un graphique de la dextérité tracée en fonction de l'erreur maximale. L'erreur due à un espace d'incertitude n'est pas inversement proportionnelle à la dextérité et peut même être plus faible dans une position de dextérité

moindre. Toutefois, on peut remarquer une tendance : la dextérité moyenne d'un intervalle diminue alors que son erreur maximale moyenne augmente.

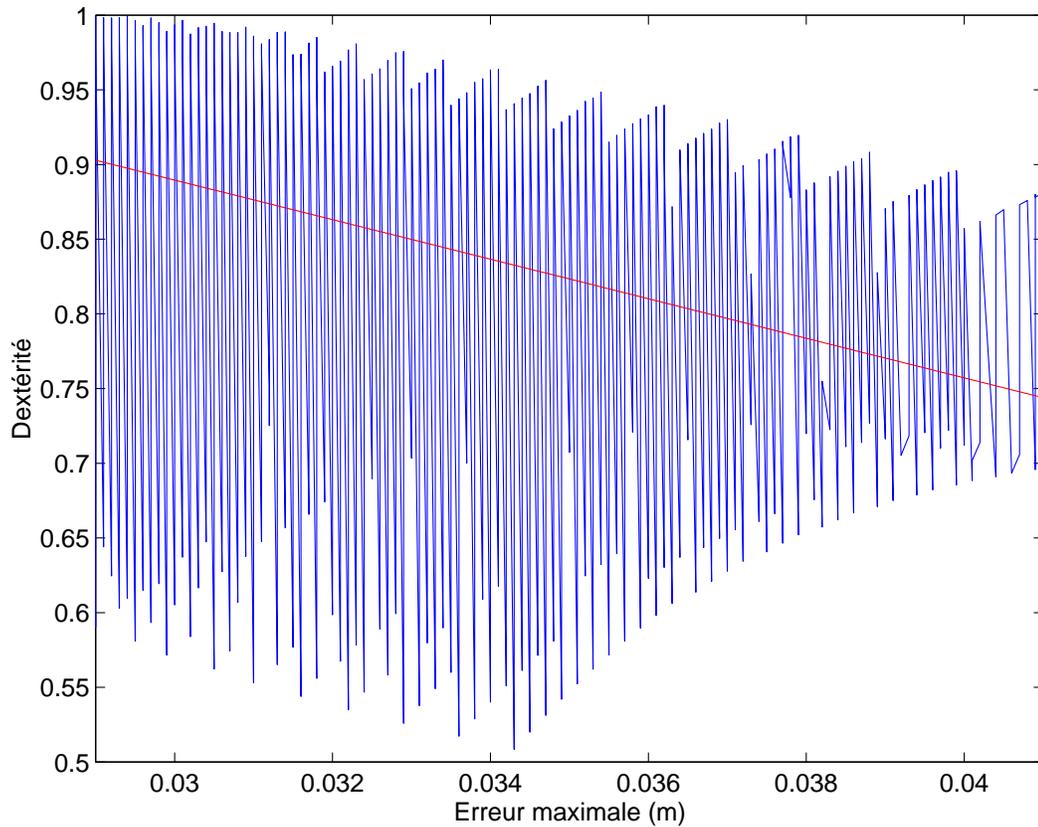


FIG. 5.11 – Dextérité en fonction de l'erreur maximale lorsque $\delta = 0,02$.

5.2 Manipulateur spatial à trois DDL

Les zones de singularité, l'erreur de position et la dégradation des propriétés cinématiques sont présentées dans l'ordre mentionné.

5.2.1 Zones de singularité

La base fixe du tripode est décrite par les trois vecteurs suivants : $\mathbf{r}_1 = [0 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{r}_2 = [1 \ 0 \ 0]^T$ et $\mathbf{r}_3 = [1/2 \ \sqrt{3}/2 \ 0]^T$. La base est dans le plan $z = 0$ et les lieux

de singularités correspondent à ce même plan. En ajoutant un jeu (δ) à chaque patte, le plan $z = 0$ devient le plan de symétrie de la zone des singularités. La figure 5.12 montre la hauteur de la zone des singularités par rapport à $z = 0$, pour un jeu de 0,02. Les lignes pointillées vertes délimitent les sept sections définies au chapitre précédent et leurs trois intersections correspondent aux points d'attache des pattes sur la base, le bout des vecteurs \mathbf{r}_i , $i = 1, 2, 3$.

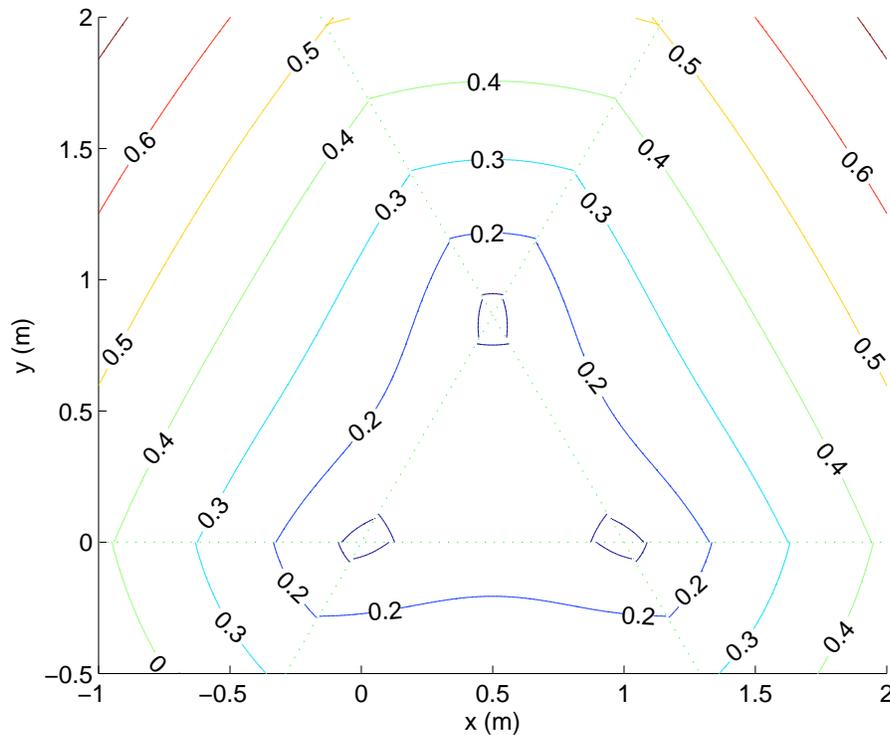


FIG. 5.12 – Hauteur de la zone des singularités causée par le jeu $\delta = 0,02$ m.

5.2.2 Erreur de position

Pour une position xyz choisie de l'organe terminal, le jeu permettra un mouvement selon les trois axes qui causera des erreurs en position. La figure 5.13 montre la variation possible selon l'axe z à deux différentes valeurs de z : $z = 0,8$ et $z = 1,2$ m, lorsque le jeu prend la même valeur de 0,02 m. Pour deux courbes représentant la même élévation, celle qui est plus épaisse correspond à $z = 1,2$ m, dans la figure. À chaque point xy de l'élévation choisie, la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur

de z dans l'espace d'incertitude est enregistrée. C'est à une élévation $z = 1,2$ m que l'erreur possible est la plus faible. Ceci n'est pas surprenant puisque cette élévation est plus éloignée de la zone des singularités.

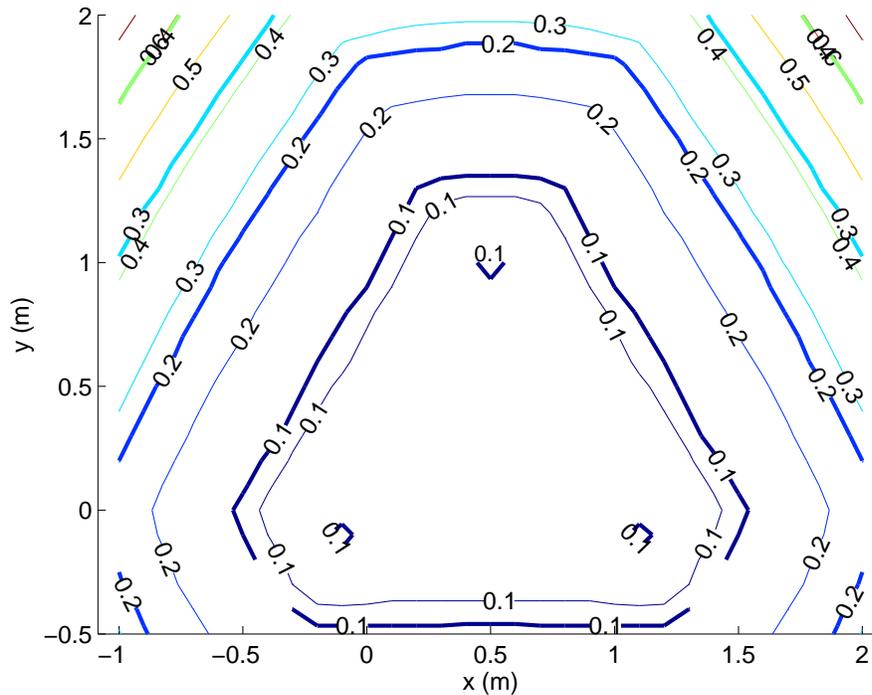


FIG. 5.13 – Variation totale possible de z causée par le jeu, à deux valeurs imposées de z : $z = 0,8$ et $z = 1,2$ m.

5.2.3 Dégradation de la dextérité

À une valeur choisie de $z = 0,8$ m, la dextérité a été tracée en absence de jeu et lorsque le jeu prend une valeur de $0,02$ m (courbes plus épaisses). Ceci est montré à la figure 5.14. On remarque que plus la dextérité est faible, plus la perte de dextérité est élevée. Les courbes se déplacent de plus en plus rapidement pour une dextérité plus faible.

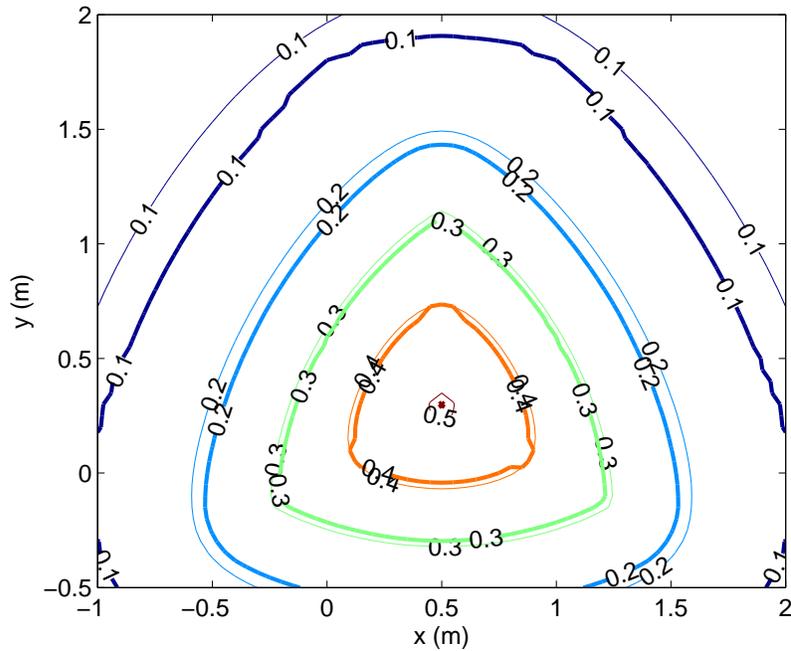


FIG. 5.14 – Dextérité avec $\delta = 0,02$ m et sans jeu pour une valeur choisie de $z = 0,8$ m.

5.2.4 Dégradation de la raideur

À une valeur choisie de $z = 0,8$ m, la raideur selon l'axe z a été tracée en absence de jeu et lorsque le jeu prend une valeur de $0,02$ m (courbes plus épaisses). Ceci est montré à la figure 5.15. On peut remarquer que les courbes se déplacent de plus en plus pour une rigidité moindre.

5.2.5 Comparaison de la distribution de l'erreur et de la dextérité

L'espace de travail du tripode a été discrétisé de la façon suivante pour un total de 2091 points :

$$\begin{aligned} x &= 0,5 : 0,01 : 0,9 \text{ m} \\ y &= 0,2 : 0,01 : 0,7 \text{ m} \end{aligned} \tag{5.4}$$

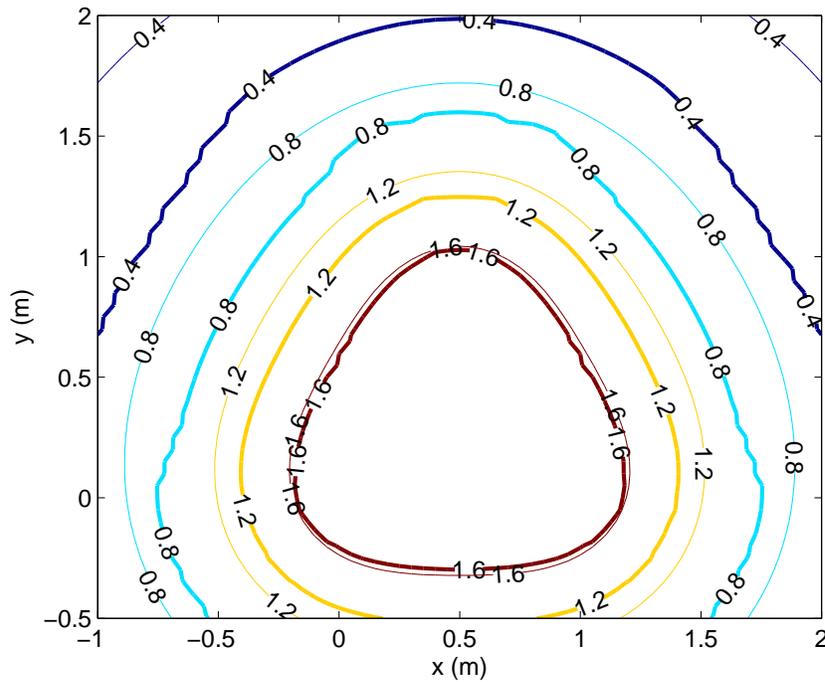


FIG. 5.15 – Raideur selon l’axe z avec $\delta = 0,02$ m et sans jeu pour une valeur choisie de $z = 0,8$ m.

À tous ces points, l’erreur maximale (due à un jeu $\delta = 0,02$ m) et la dextérité ont été calculés pour une hauteur $z = 0,8$ et une hauteur $z = 1,2$. La figure 5.16 montre un graphique de la dextérité tracé en fonction de l’erreur maximale lorsque $z = 0,8$. On peut remarquer la même tendance qu’à la figure 5.11 : la dextérité diminue alors que l’erreur maximale augmente. À la figure 5.17, on peut voir que l’étendue des valeurs de la dextérité ainsi que l’étendue des valeurs de l’erreur maximale sont un peu moins grandes qu’à la figure 5.16. Les différences entre les deux valeurs de z ne sont pas énormes, mais elles sont présentes.

5.3 Manipulateur plan à trois DDL

La base fixe du 3-RPR plan est décrite par les trois vecteurs \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 et \mathbf{r}_3 présentés dans le tableau 5.1. Ceux-ci sont exprimés en mètres et selon le système d’axes fixe et par rapport à l’origine de ce système. La plate-forme mobile est décrite par les

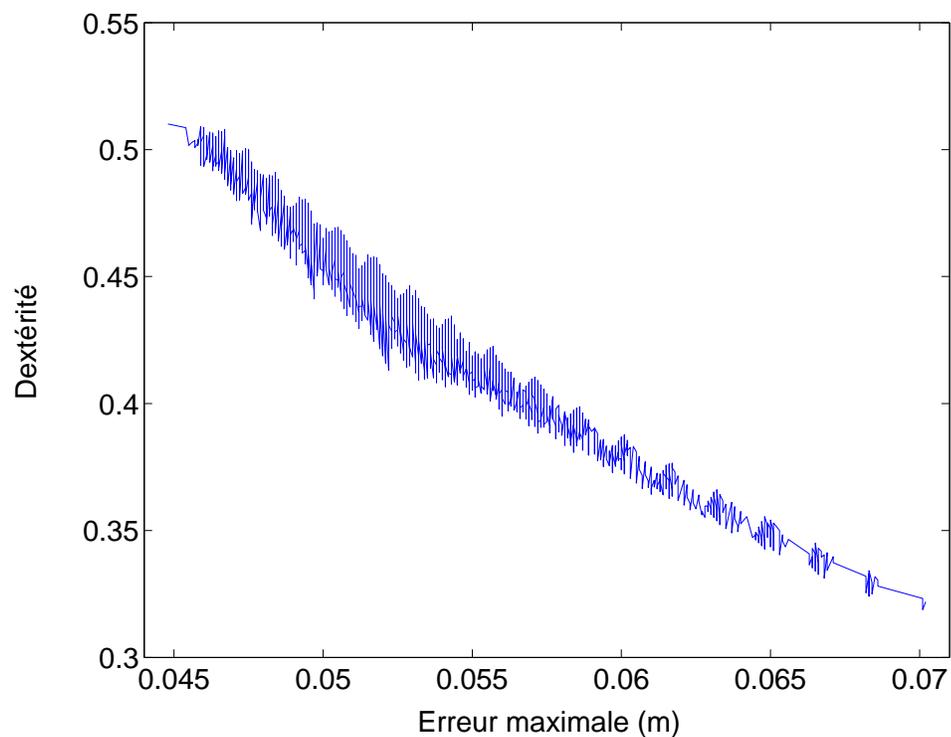


FIG. 5.16 – Dextérité en fonction de l'erreur maximale lorsque $z = 0,8$.

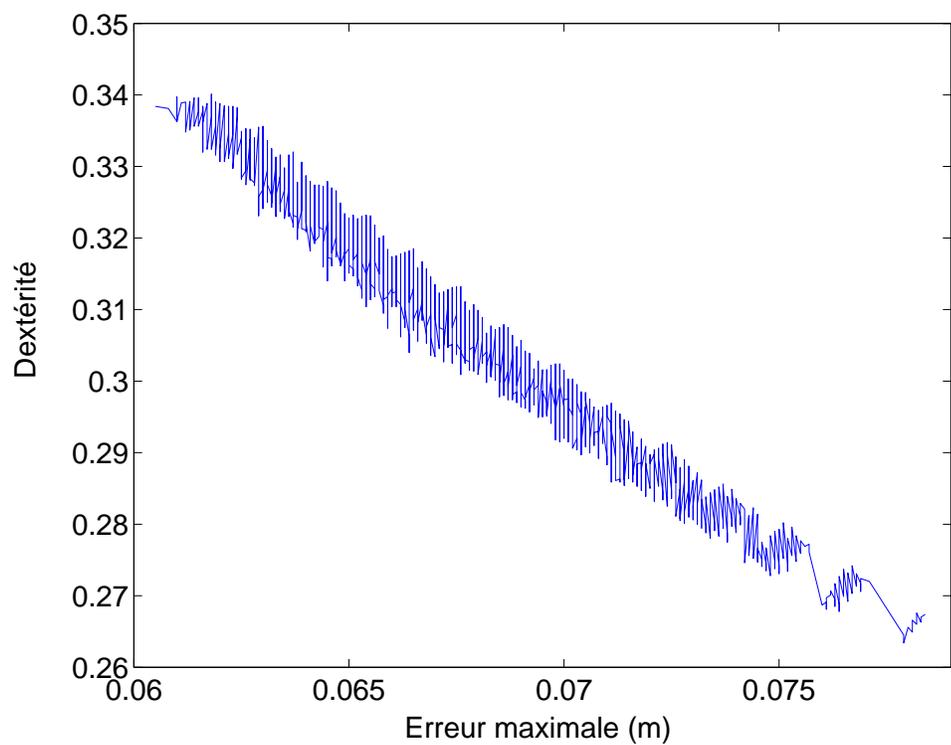


FIG. 5.17 – Dextérité en fonction de l'erreur maximale lorsque $z = 1,2$.

trois vecteurs \mathbf{s}_{01} , \mathbf{s}_{02} et \mathbf{s}_{03} aussi présentés dans le tableau. Ces derniers vecteurs sont exprimés selon le système d'axes mobile attaché à la plate-forme mobile et par rapport à l'origine de ce système, l'origine étant l'emplacement de l'organe terminal. Tous les résultats présentés dans cette section sont ceux obtenus pour cette architecture.

base	plate-forme
$\mathbf{r}_1 = [0 \quad 0]^T$	$\mathbf{s}_{01} = [-0,2 \quad -0,2]^T$
$\mathbf{r}_2 = [1 \quad 0]^T$	$\mathbf{s}_{02} = [0,2 \quad 0]^T$
$\mathbf{r}_3 = [0 \quad 1]^T$	$\mathbf{s}_{03} = [-0,1 \quad 0,3]^T$

TAB. 5.1 – Architecture du 3-RPR plan.

Les premiers résultats présentés sont une étude des zones de singularités dues au jeu dans les articulations rotoïdes passives. Suivra ensuite l'étude de l'erreur en position et pour finir, la dégénérescence des propriétés cinématiques.

5.3.1 Zones des singularités

La figure 5.18 montre, pour une orientation choisie de 60° , l'effet de la grandeur du jeu sur l'étendue de la zone des singularités. La plus petite zone (en jaune) correspond à un jeu de 0,01 et la plus grande (en rouge) correspond à un jeu de 0,02 m. La courbe des singularités ($\delta = 0$), une ellipse, est montrée en vert. Les arcs de cercle, en bleu, sont les limites de l'espace de travail. À partir de cette figure, on peut constater qu'un jeu d'une grandeur double n'a pas pour effet de doubler la superficie de la zone des singularités.

Tel que dans le cas de l'orientation constante choisie de $\phi = 60^\circ$, la courbe des singularités obtenue pour une orientation constante choisie de $\phi = -30^\circ$ est elle aussi une ellipse (voir figure 5.19). Par contre, la zone des singularités causée par un jeu de 0,01 est beaucoup plus étendue. Ce phénomène peut être expliqué à l'aide de la figure 5.20. Cette figure montre comment évolue les singularités près de $\phi = -30^\circ$, lorsque l'on fait varier ϕ . Si ϕ diminue, la courbe des singularités continue d'être une ellipse, tel que montré à la figure 5.20, lorsque $\phi = -40^\circ$. Entre les valeurs $\phi = -30^\circ$ et $\phi = -25^\circ$, la courbe des singularités passe de la forme elliptique à la forme hyperbolique. De plus, avec une variation supplémentaire de seulement 5° la courbe des singularités balaye une surface assez grande.

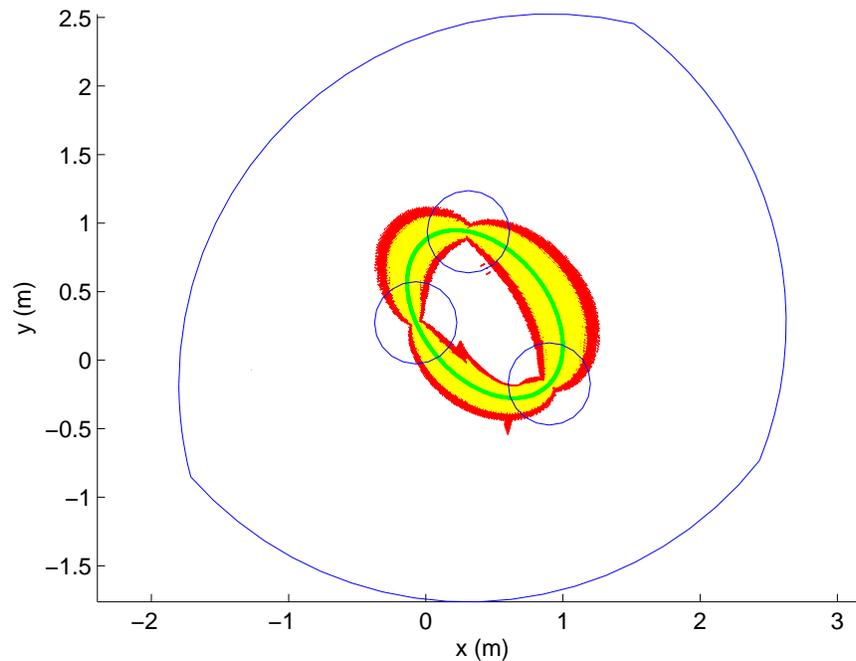


FIG. 5.18 – Courbe des singularités à une orientation constante de $\phi = 60^\circ$ et la zone des singularités avec $\delta = 0,01$ et $\delta = 0,02$ m.

Le même phénomène se produit de l'autre côté de la transition elliptique-hyperbolique, dans la figure 5.21. À une orientation choisie de 20° , la courbe des singularités est une ellipse, mais la transition vers la forme hyperbolique est suffisamment rapprochée pour influencer la forme de la zone des singularités due à un jeu de $0,02$ m.

À l'intérieur de l'intervalle de ϕ où les courbes des singularités sont des hyperboles, celles-ci dégènèrent en deux lignes droites qui s'intersectent lorsque $\phi = 0^\circ$. La figure 5.22 montre les courbes des singularités lorsque $\phi = 0^\circ$ (deux droites en vert) ainsi que les courbes correspondant à des orientations constantes $\phi = -10^\circ$ (en bleu) et $\phi = 10^\circ$ (en rouge). Les courbes varient rapidement pour un changement d'orientation qui est relativement faible. L'espace de travail exempt de singularités peut alors devenir très restreint lorsque l'on considère le jeu dans les articulations et les zones des singularités qui en résultent. L'espace de travail (limites en bleu) et les zones singulières (en rouge) sont tracés dans la figure 5.23. La zone singulière est très répandue en comparaison avec les autres cas présentés précédemment. Il est donc préférable, dans la planification d'une tâche donnée, de choisir un intervalle d'orientations le plus loin possible de celles correspondant à des changements brusques des courbes des singularités, pour une faible

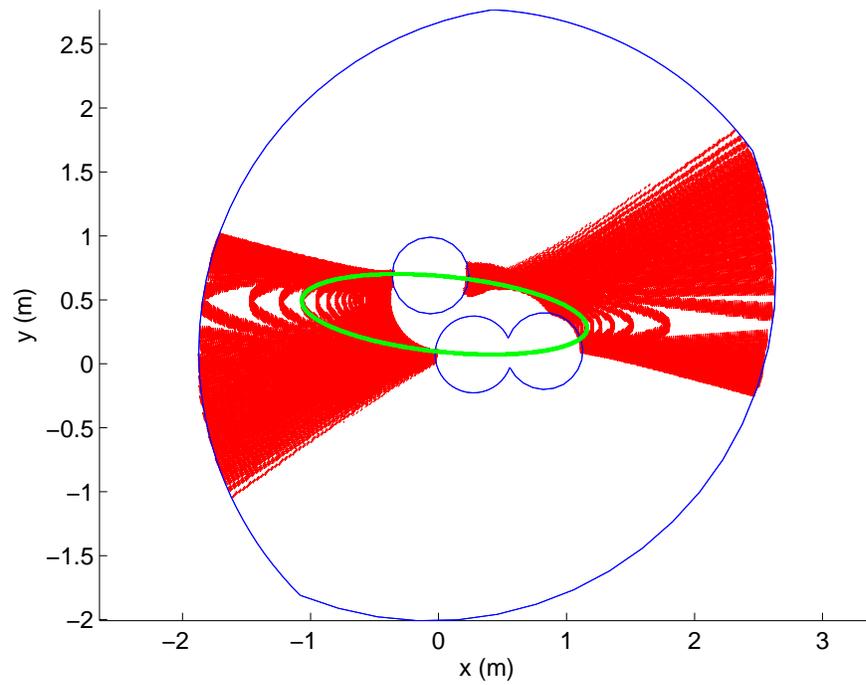


FIG. 5.19 – Courbe des singularités à une orientation constante de $\phi = -30^\circ$ et la zone des singularités avec $\delta = 0,01$ m.

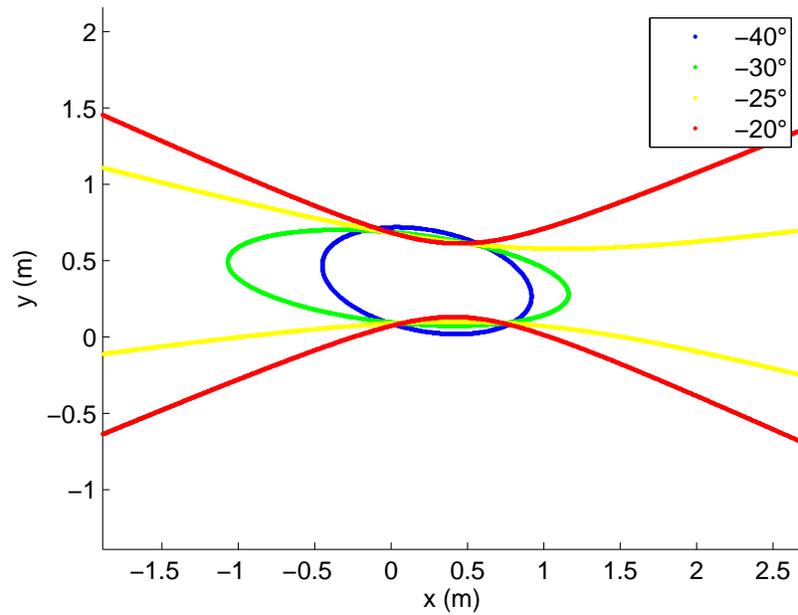


FIG. 5.20 – Courbe des singularités à des orientations constantes de $\phi = -40^\circ$, -30° , -25° et -20° .

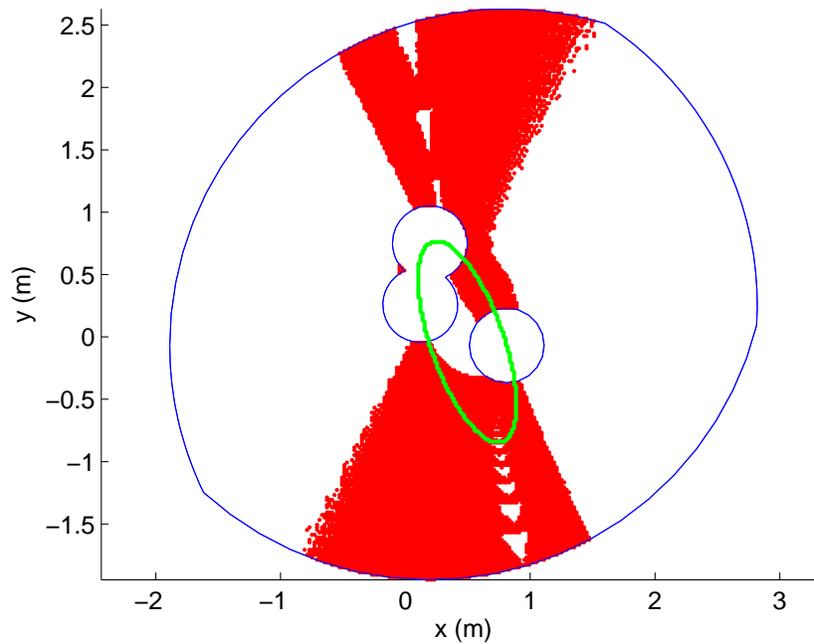


FIG. 5.21 – Courbe des singularités à une orientation constante de $\phi = 20^\circ$ et la zone des singularités avec $\delta = 0,02$ m.

variation de ϕ .

L'évolution de la forme des courbes des singularités n'est pas le seul facteur déterminant l'étendue des zones singulières ou la taille de l'espace d'incertitude dû à δ . La forme des espaces d'incertitudes a aussi un effet.

5.3.2 Erreur de position et d'orientation

Deux orientations constantes ont été choisies pour présenter l'effet du jeu sur la précision de positionnement du manipulateur. Les orientations $\phi = 0^\circ$ et $\phi = 60^\circ$ ont été choisies puisqu'on connaît déjà leurs courbes des singularités et la forme de leurs zones singulières. Il y a un lien étroit entre l'étendue de la zone singulière et les pertes de précision à différents endroits à l'intérieur de l'espace de travail. Les figures 5.24 et 5.25 montrent les espaces d'incertitudes dus au jeu (en rouge) pour différentes positions choisies (croix bleues) de l'organe terminal à l'orientation constante indiquée. Les arcs de cercle, en bleu, sont les limites de l'espace de travail. Même si une orientation

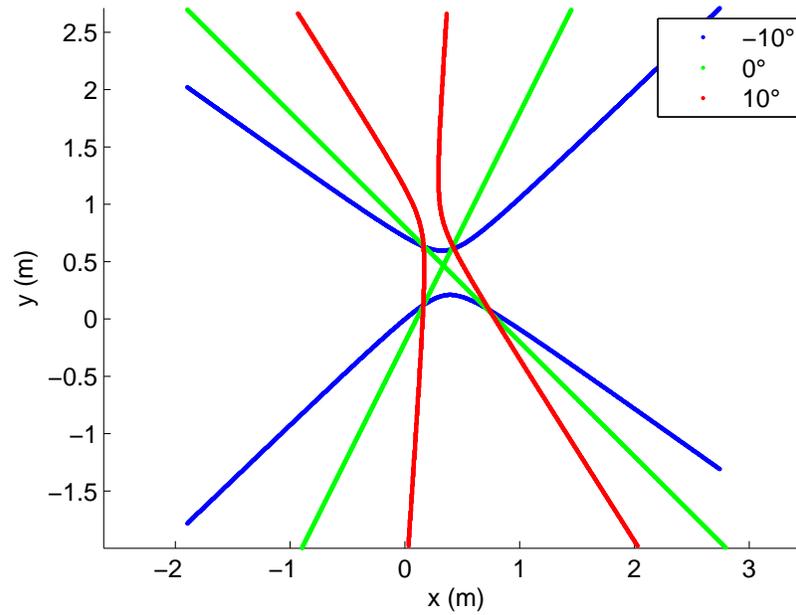


FIG. 5.22 – Courbe des singularités à des orientations constantes de $\phi = -10^\circ$, 0° et 10° .

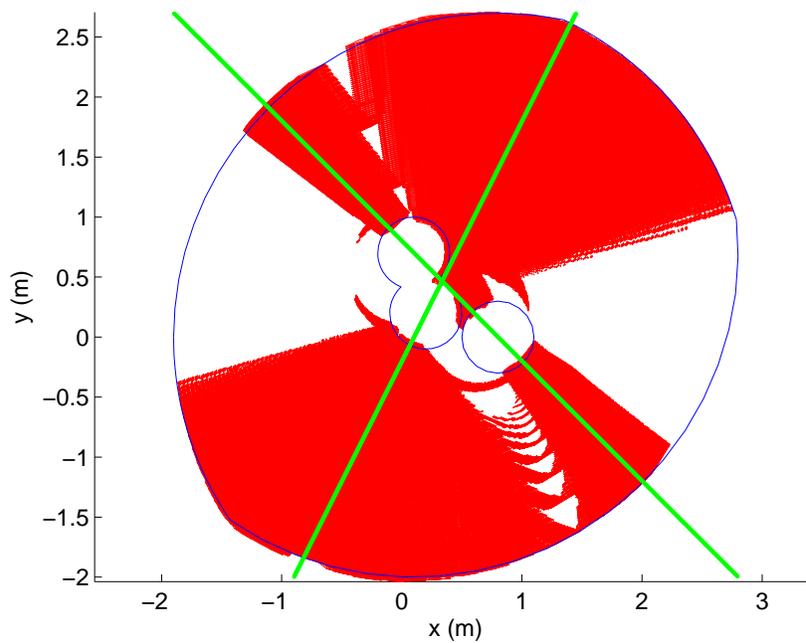


FIG. 5.23 – Courbe des singularités à une orientation constante de $\phi = 0^\circ$ et la zone des singularités avec $\delta = 0,02$ m .

constante est choisie, la variation possible de l'orientation est considérée lors de la détermination des espaces d'incertitudes dans le plan xy . Ce sont donc des espaces d'incertitude atteignables et non des espaces d'incertitude à orientation constante.

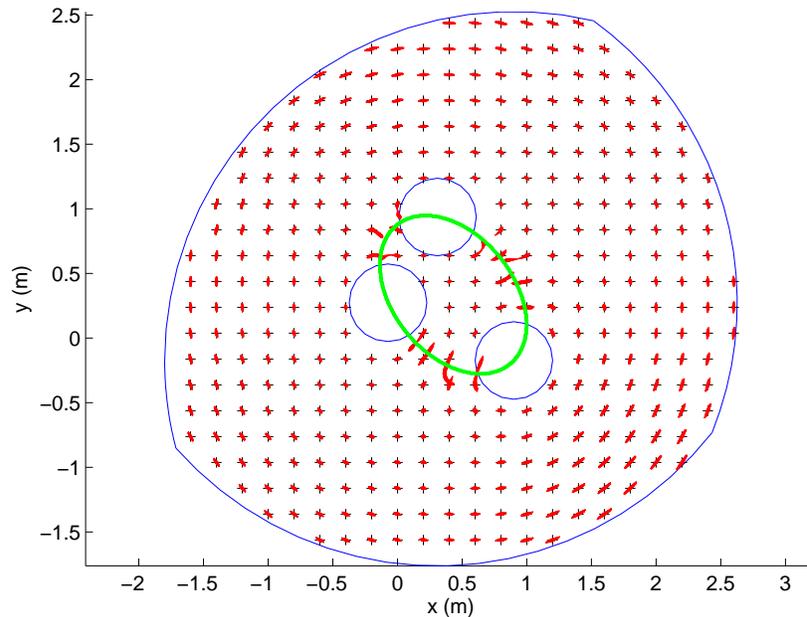


FIG. 5.24 – Espaces d'incertitudes à une orientation constante voulue de $\phi = 60^\circ$ et un jeu de 0,01 m.

De la même façon, la variation possible d'orientation est significativement plus grande lorsque la position choisie correspond à un point dans la zone singulière. La figure 5.26 montre la variation possible de l'orientation à différents points lorsque les actionneurs sont immobiles et ce, pour une orientation constante choisie $\phi = -30^\circ$. La courbe des singularités est montrée en vert et les arcs de cercle, en bleu, sont les limites de l'espace de travail.

5.3.3 Dégradation de la dextérité et de la raideur

Les figures de cette section contiennent des courbes d'isodextérité et d'isoraideur associées au manipulateur en absence de jeu aux articulations passives ainsi que ces mêmes courbes lorsque l'on considère le jeu (courbes plus épaisses). Il est donc possible

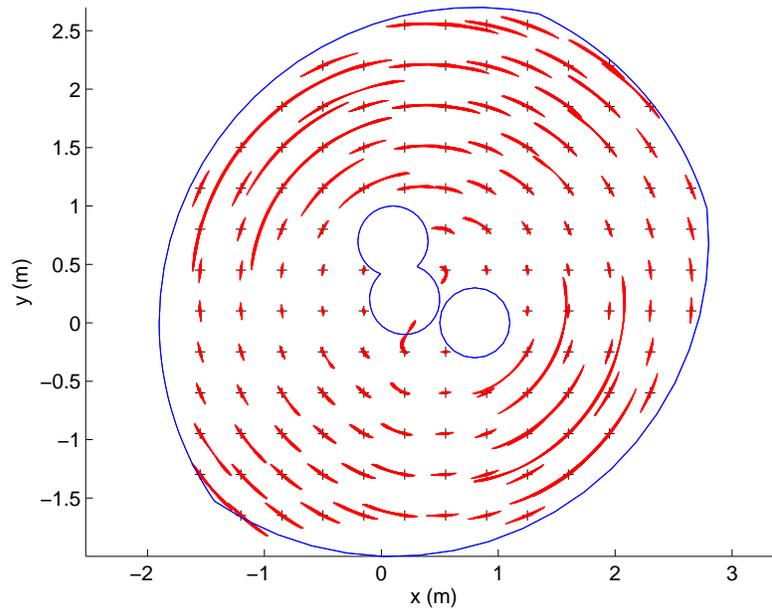


FIG. 5.25 – Espaces d’incertitudes à une orientation constante voulue de $\phi = 0^\circ$ et un jeu de 0,01 m.

d’observer le déplacement des courbes. Ces trois figures contiennent aussi toutes les courbes des singularités (lignes vertes épaisses). Ces dernières représentent une dextérité nulle.

La figure 5.27 montre la variation de la dextérité pour une orientation choisie de $\phi = 0^\circ$ lorsque le jeu prend une valeur de 0,01 m. Les points faisant partie de la zone des singularités ont une dextérité nulle. Les espaces les plus éloignées de la zone des singularités ont des dextérités dépassant 0,1. La courbe d’isodextérité d’une valeur de 0,12 correspond au manipulateur n’ayant aucun jeu, par contre, cette isodextérité est inexistante lorsque le jeu est considéré. On peut observer le même genre de résultat à la figure 5.28, où l’orientation choisie est de $\phi = -30^\circ$ et le jeu prend la même valeur de 0,01 m. Lorsque le jeu est considéré, les limites des zones de plus haute dextérité diminuent, même jusqu’à disparaître alors que les zones de plus faible dextérité s’étendent. Pour les deux cas présentés, on peut constater certaines tendances. Les courbes d’isodextérités plus faibles subissent de plus grands déplacements que les isodextérités plus élevées.

La figure 5.29 montre la capacité du manipulateur à appliquer un moment ou à résister à un moment autour de l’axe z (perpendiculaire au plan du manipulateur).

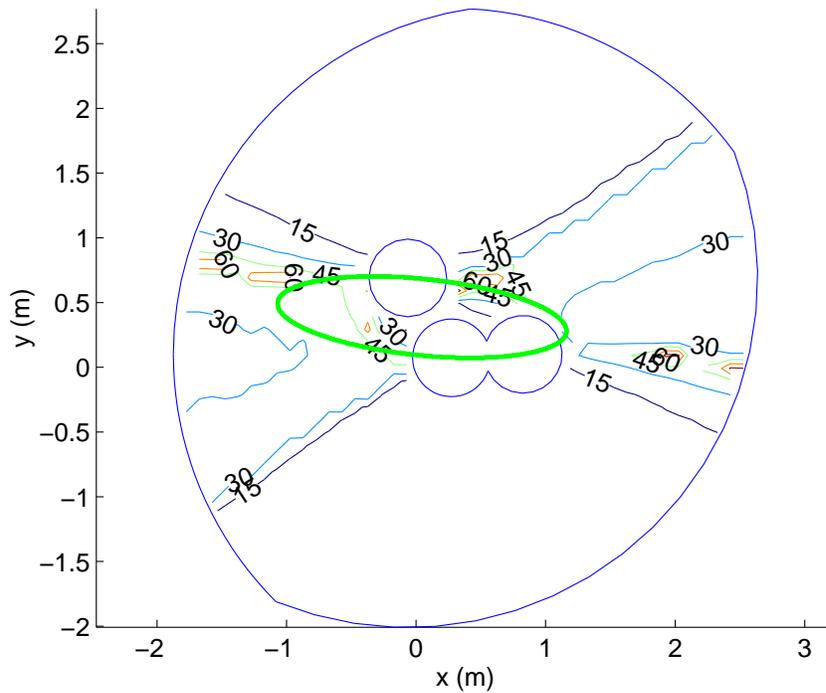


FIG. 5.26 – Variation possible de ϕ pour une orientation constante souhaitée de $\phi = -30^\circ$ et un jeu de 0,01 m.

L'orientation constante choisie est de $\phi = -30^\circ$ et le jeu prend une valeur de 0,01 m. On a donné une raideur unitaire à chacune des pattes. L'ellipse verte est la courbe des singularités.

5.3.4 Comparaison de la distribution de l'erreur et de la dextérité

Un total de trois espaces de travail à orientation constante du manipulateur 3-RPR ont été discrétisés à des intervalles de 0,01 m (selon les axes x et y). Ils sont représentés à la figure 5.30. Dans chaque espace de travail, deux boîtes ont été définies. La première, ayant les mêmes dimensions pour les trois orientations constantes, contient les articulations fixes du manipulateur et des singularités (courbes vertes, plus épaisses). Les boîtes identifiées par un numéro deux ne contiennent pas de singularités et si possible, des dextérités élevées (courbes d'isodextérité rouges et/ou jaunes). À tous ces

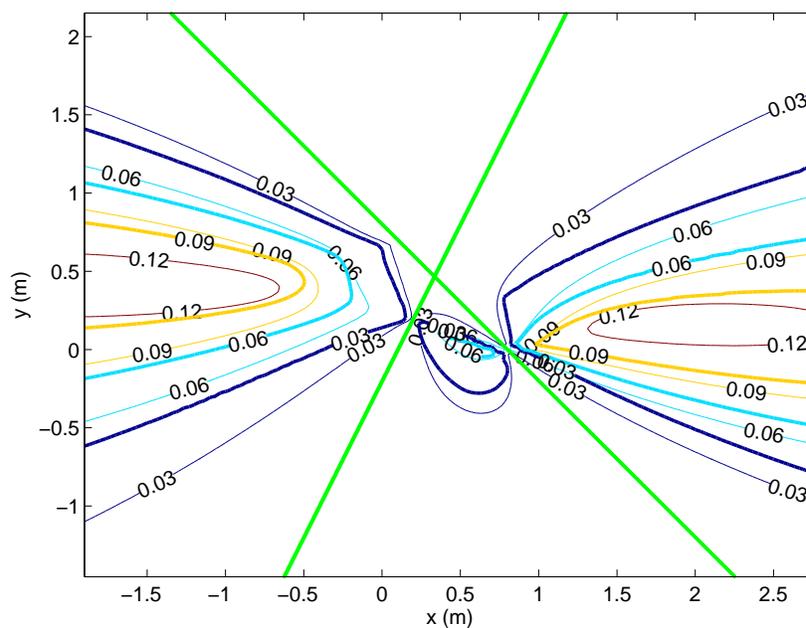


FIG. 5.27 – Dextérité à une orientation constante choisie $\phi = 0^\circ$ sans jeu et avec un jeu de 0,01 m.

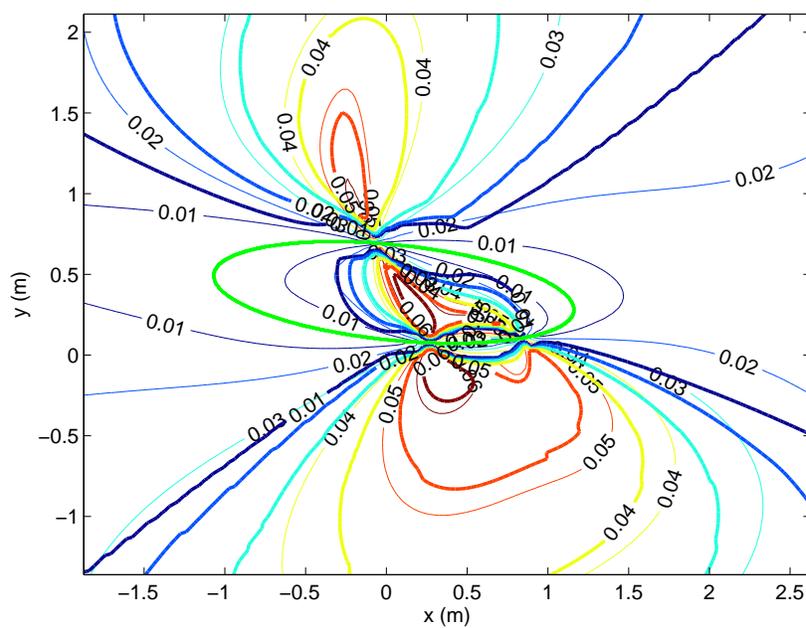


FIG. 5.28 – Dextérité à une orientation constante choisie $\phi = -30^\circ$ sans jeu et avec un jeu de 0,01 m.

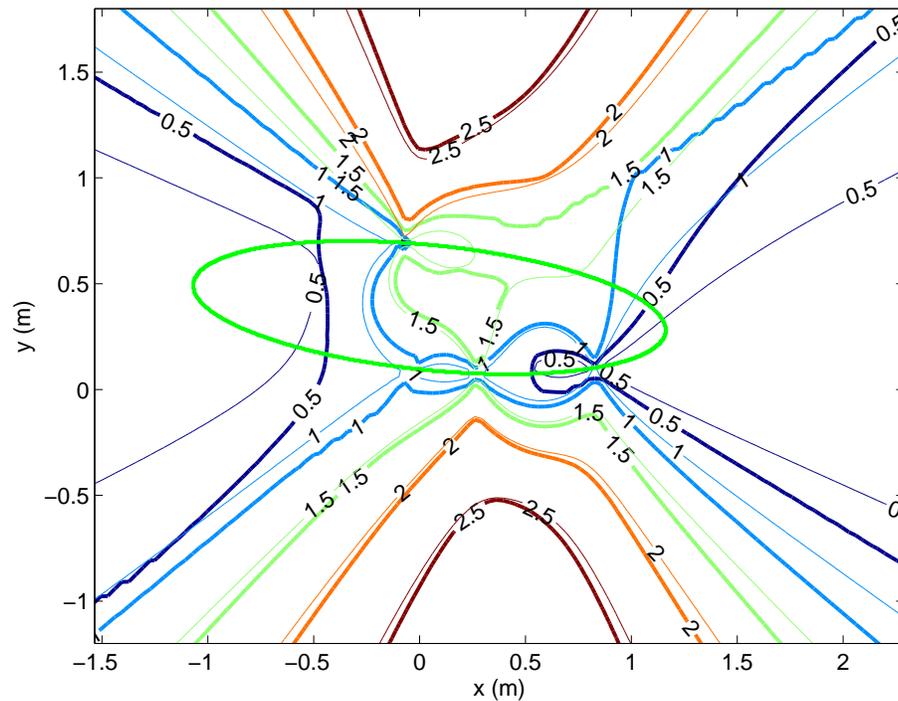


FIG. 5.29 – Dégradation de la raideur selon l'axe y à une orientation constante choisie $\phi = -30^\circ$ sans jeu et avec un jeu de 0,01 m.

points, l'erreur maximale en position et l'erreur maximale en orientation (due à un jeu $\delta = 0,01$ m) et la dextérité ont été calculés. Les figures 5.31 à 5.33 montrent des graphiques de la dextérité tracée en fonction de l'erreur maximale aux trois orientations constantes choisies. Dans chaque figure, les résultats obtenus pour les boîtes 1 et 2 de la figure 5.30 sont identifiés par (a) et (b), respectivement. À chaque paire de graphiques (deux paires par figure), celui ayant l'erreur maximale en position à l'abscisse est montré en premier et celui qui a l'erreur maximale en orientation à l'abscisse suit. Sur un total de douze graphiques, il y en a deux qui ne démontrent pas du tout la même tendance que les autres : le 1er de la figure 5.32b et le 1er de la figure 5.33b. Dans tous les cas, les erreurs maximales sont plus faibles dans les boîtes 2, où les singularités sont absentes, ce qui était prévu.

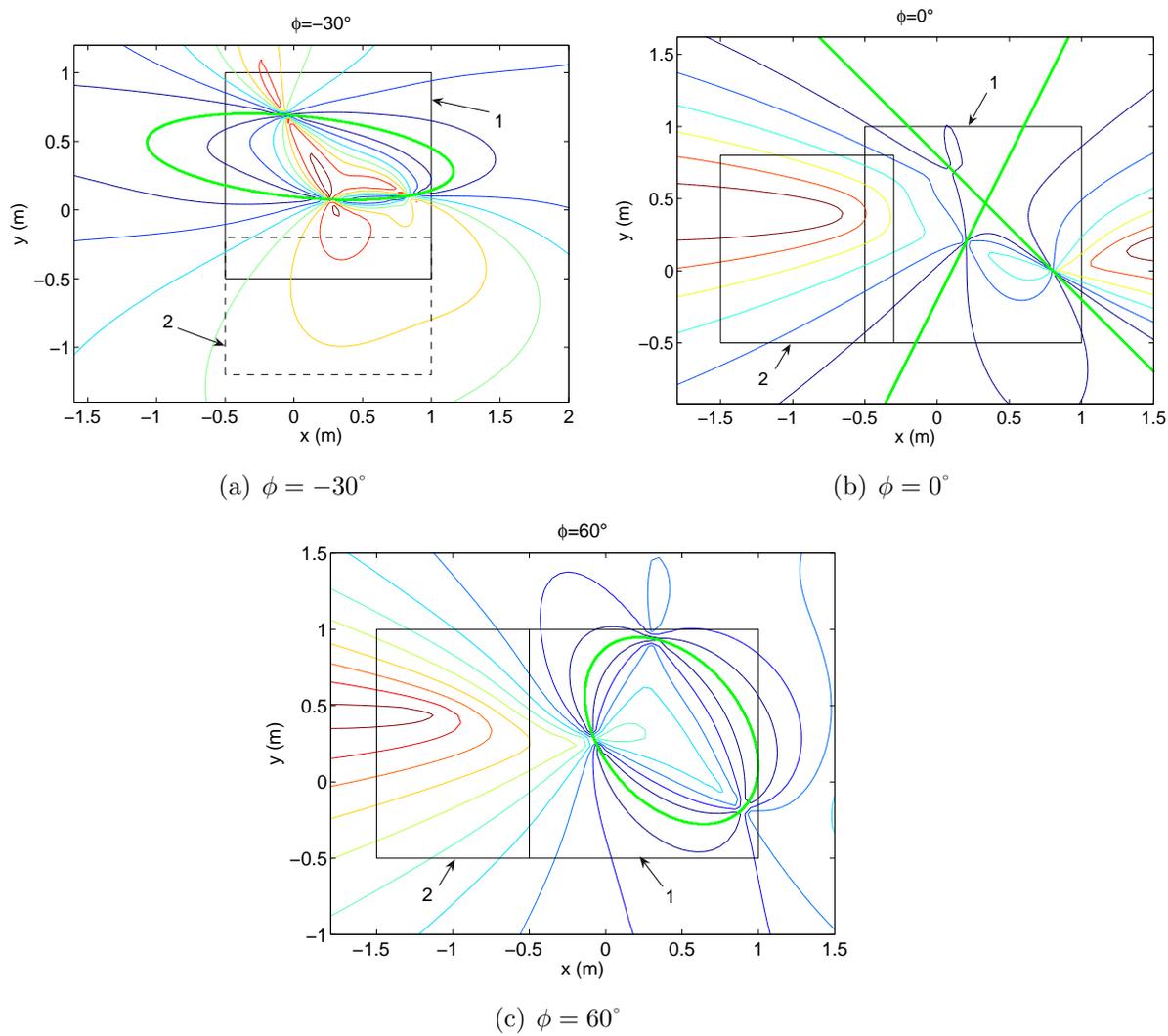


FIG. 5.30 – Les boîtes discrétisées dans les espaces de travail à orientation constante.

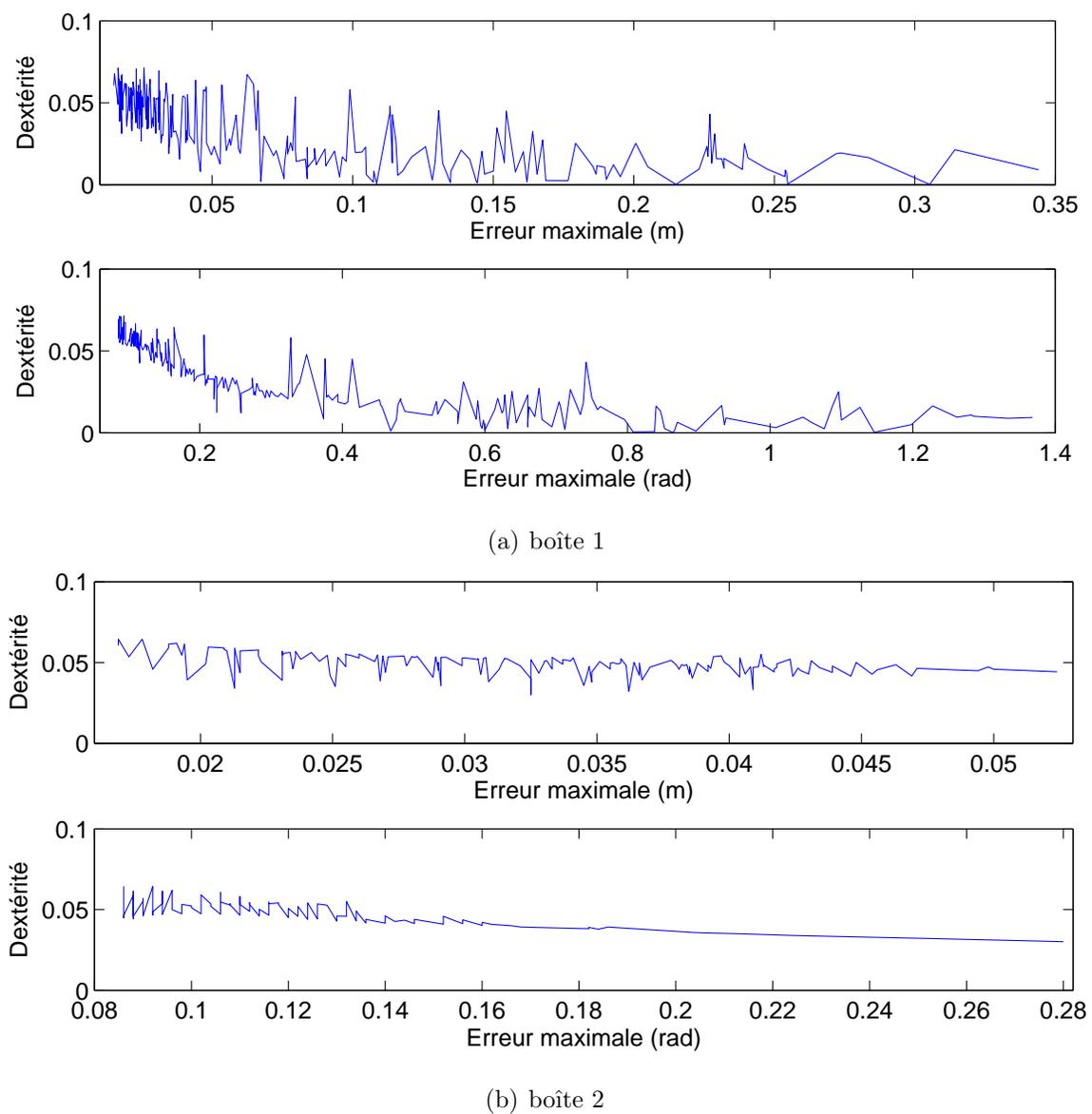


FIG. 5.31 – Dextérité en fonction de l'erreur maximale lorsque $\phi = -30^\circ$ et $\delta = 0,01$

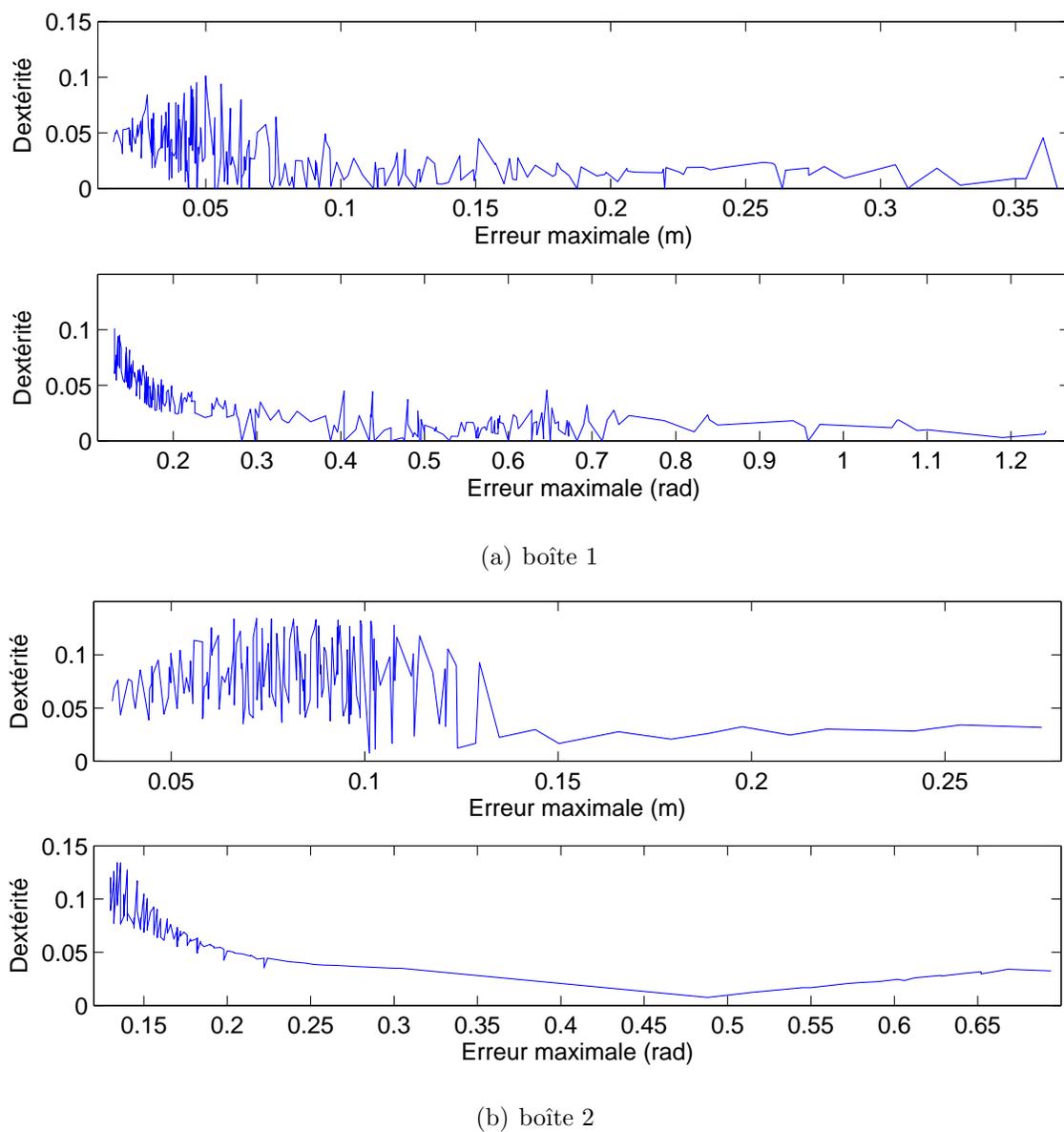
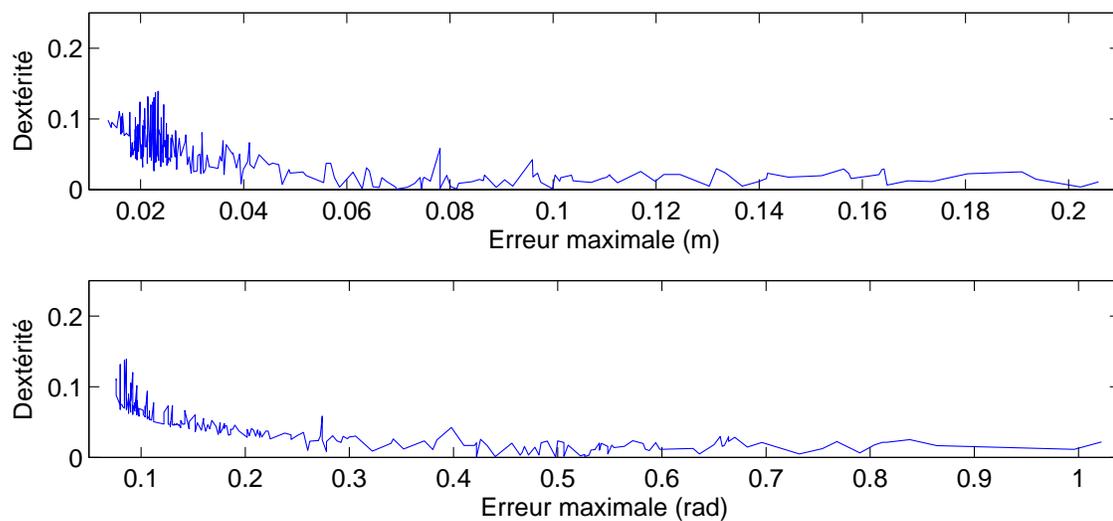
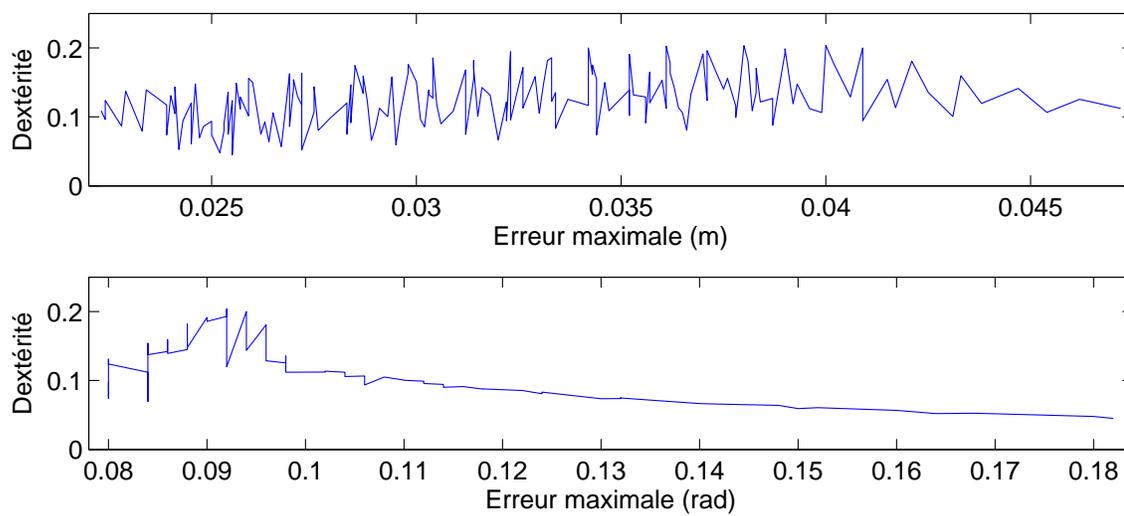


FIG. 5.32 – Dextérité en fonction de l’erreur maximale lorsque $\phi = 0^\circ$ et $\delta = 0,01$



(a) boîte 1



(b) boîte 2

FIG. 5.33 – Dextérité en fonction de l'erreur maximale lorsque $\phi = 60^\circ$ et $\delta = 0,01$

base	plate-forme
$\mathbf{r}_1 = [-1 \quad 0 \quad -1]^T$	$\mathbf{s}_{01} = [-0,2 \quad -0,2 \quad 0]^T$
$\mathbf{r}_2 = [0 \quad 0 \quad -1]^T$	$\mathbf{s}_{02} = [0,2 \quad 0 \quad 0]^T$
$\mathbf{r}_3 = [-1 \quad 1 \quad -1]^T$	$\mathbf{s}_{03} = [-0,1 \quad 0,3 \quad 0]^T$

TAB. 5.2 – Architecture du 3-SPS sphérique.

5.4 Manipulateur sphérique à trois DDL

La base fixe est décrite par les trois vecteurs \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 et \mathbf{r}_3 présentés dans le tableau 5.2. Ceux-ci sont exprimés selon le système d'axes fixe. La plate-forme mobile est décrite par les trois vecteurs \mathbf{s}_{01} , \mathbf{s}_{02} et \mathbf{s}_{03} aussi présentés dans le tableau. Ces derniers vecteurs sont exprimés selon le système d'axes mobile attaché à la plate-forme mobile. L'origine du système d'axes mobile est fixe, à une hauteur $h = 1$, perpendiculaire au plan de la base fixe. Tous les résultats présentés dans cette section sont ceux obtenus pour cette architecture.

Les résultats obtenus pour ce manipulateur présentent premièrement une étude de l'erreur en orientation due au jeu dans les articulations passives. Suivra ensuite une étude des zones des singularités et pour finir, la dégénérescence des propriétés cinématiques.

5.4.1 Erreur d'orientation

Les figures 5.34 et 5.35 montrent, pour quatre torsions constantes choisies, les espaces d'incertitudes ainsi que les variations possibles de la torsion dus au jeu et à la flexibilité. Les courbes des singularités sont montrées en vert (courbes épaisses). La suite $\sigma = 0^\circ$, $\sigma = 15^\circ$, $\sigma = 30^\circ$ et $\sigma = 60^\circ$ permet de voir une évolution de la variation possible selon l'orientation choisie, pour des valeurs croissantes de la torsion. Pour chacune des valeurs de σ , les espaces d'incertitudes ont été tracés pour la même série de valeurs choisies de ϕ et de θ .

Afin de bien comparer la taille d'un espace d'incertitude avec un autre (à l'oeil), il faut tenir compte de la différence d'inclinaison entre les deux. Pour une même variation

selon l'azimuth, un espace paraîtra plus étendu s'il se trouve à une inclinaison plus grande; il faut donc comparer l'angle parcouru par un arc variant de la plus petite valeur de l'azimuth jusqu'à la plus grande valeur de l'azimuth.

Dans tous les cas, la valeur combinée du jeu et de la flexibilité est de 0,01 ($\delta = 0,01$ m). Les courbes des singularités sont incluses dans chaque figure afin de montrer le lien entre l'étendue des erreurs possibles et la proximité des singularités. Il serait trompeur de regarder seulement la taille des espaces d'incertitudes, ou seulement la variation possible de la torsion σ , lorsque l'on veut étudier la variation de l'erreur possible en orientation selon la proximité des courbes des singularités. La plage de mouvement possible, en trois dimensions, due au jeu et à la flexibilité peut être plus importante dans une direction (σ ϕ ou θ), dans deux directions ou être distribuée à peu près également en torsion et en inclinaison.

Pour le cas de $\sigma = 0^\circ$, les espaces d'incertitudes sont, en général, tous plus grands près des courbes singulières. L'erreur possible selon σ n'est pas plus élevée autour de la courbe singulière, particulièrement pour l'azimuth $\phi = -180^\circ$. Par contre, l'étendue des espaces d'incertitudes de la figure précédente est plus prononcée.

La suite des figures montre, en s'éloignant de $\sigma = 0^\circ$, que la taille des espaces d'incertitudes diminue, surtout dans l'intervalle $-90^\circ < \phi < 0^\circ$. En réduisant la valeur de l'inclinaison (θ), on peut augmenter l'intervalle de ϕ où une diminution de l'erreur est observée. L'erreur en torsion suit la même tendance. Dans le même intervalle, l'espace $\phi\theta$ où l'erreur possible en torsion est inférieur à 20° prend de plus en plus d'ampleur.

5.4.2 Zones des singularités

La forme des courbes des singularités varie rapidement entre $\sigma = 0^\circ$ et $\sigma = 15^\circ$ et plus progressivement par après, en allant vers $\sigma = 60^\circ$. Comme chez les autres architectures vues dans les sections précédentes, les variations plus rapides des courbes des singularités se traduisent par les zones singulières plus étendues. La figure 5.36 montre les courbes des singularités pour les quatre torsions présentées, lorsque l'inclinaison (représenté par le rayon) varie de $\theta = 0^\circ$ à $\theta = 180^\circ$. La plus grande différence entre deux valeurs consécutives de torsion constante est visiblement entre $\sigma = 0^\circ$ et $\sigma = 15^\circ$,

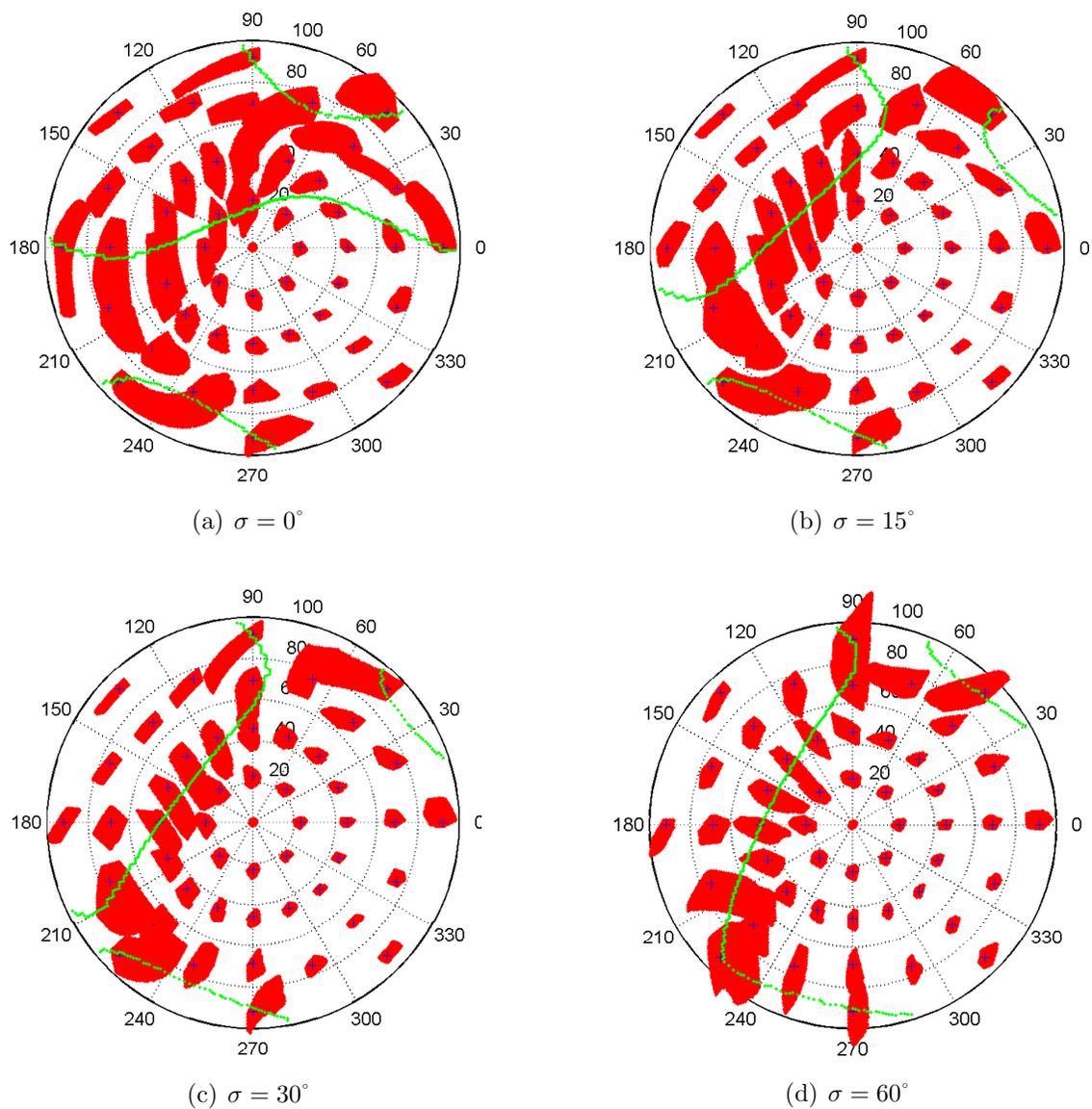


FIG. 5.34 – Espaces d’incertitudes et courbes des singularités pour $\delta = 0,01$.

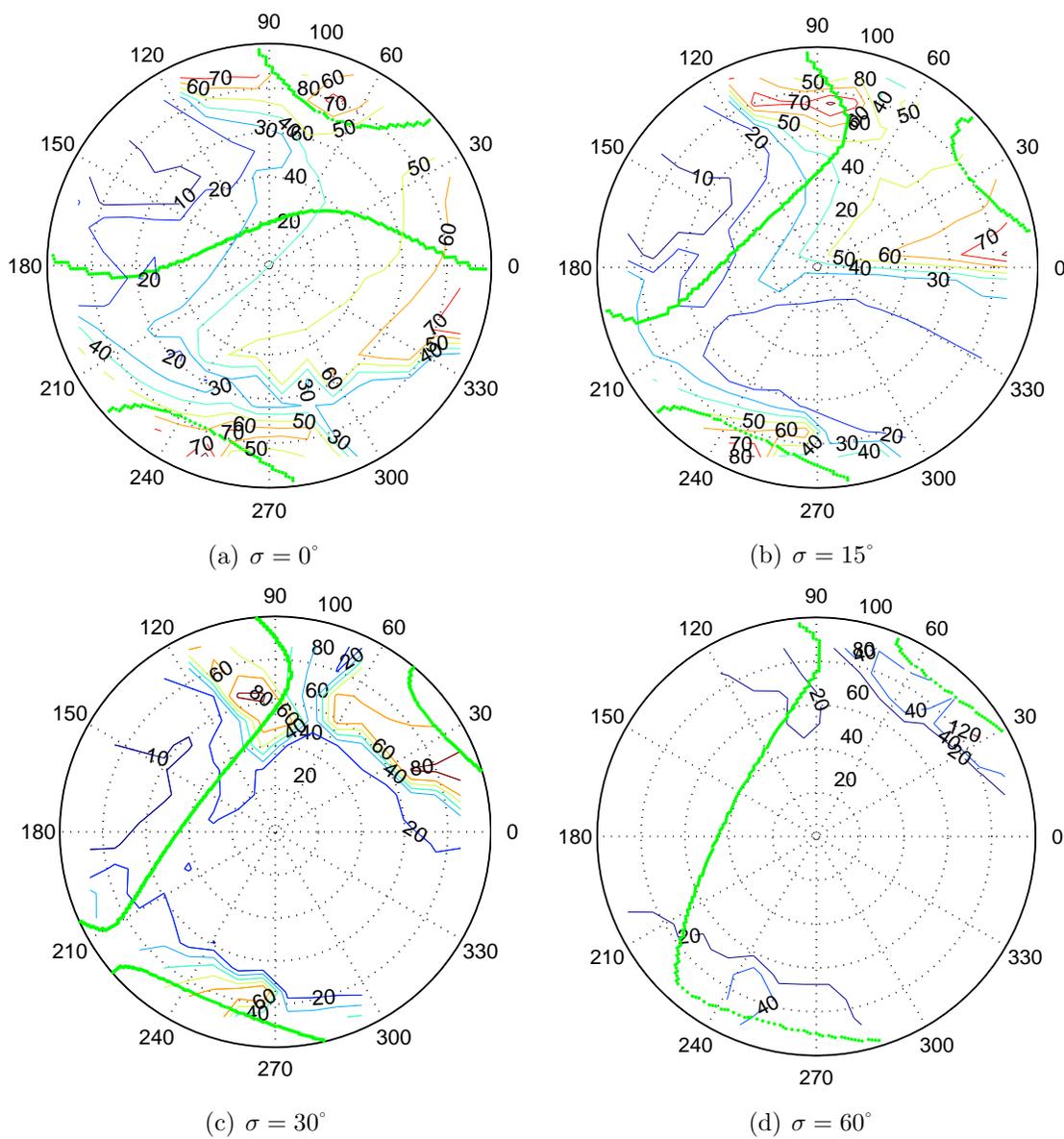


FIG. 5.35 – Variation totale possible de σ et courbes des singularités pour $\delta = 0, 01$.

pour l'intervalle d'inclinaison, θ , allant jusqu'à près de 100° .

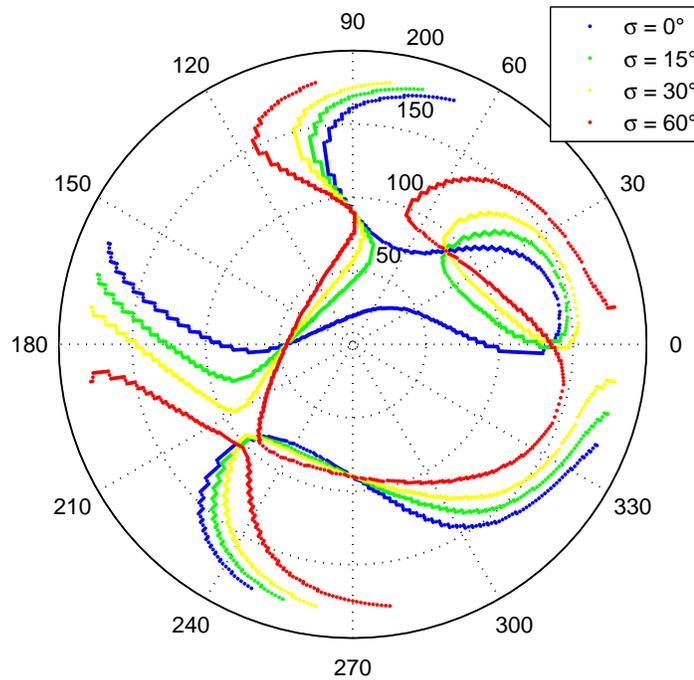


FIG. 5.36 – Courbes des singularités aux torsions constantes : 0° , 15° , 30° et 60° .

Les figures 5.37 à 5.39 montrent des résultats pour une inclinaison $\theta < 100^\circ$. La figure 5.37 contient les quatre zones singulières (en rouge) qui correspondent aux mêmes valeurs de σ . Les courbes des singularités sont montrées en vert. La zone singulière est très répandue pour $\sigma = 0^\circ$ et commence à diminuer pour $\sigma = 15^\circ$. L'étendue de la zone singulière est plus petite et semblable pour $\sigma = 30^\circ$ et $\sigma = 60^\circ$. On pourrait s'attendre à ce que la zone singulière regagne du territoire pour une torsion plus élevée, dans l'intervalle $-90^\circ < \phi < 0^\circ$, pour une inclinaison θ près de 100° et un azimuth ϕ variant de 0° à 90° . C'est ce qu'indique la figure 5.36; la courbe en rouge a tendance à se resserrer et diminuer l'espace utile.

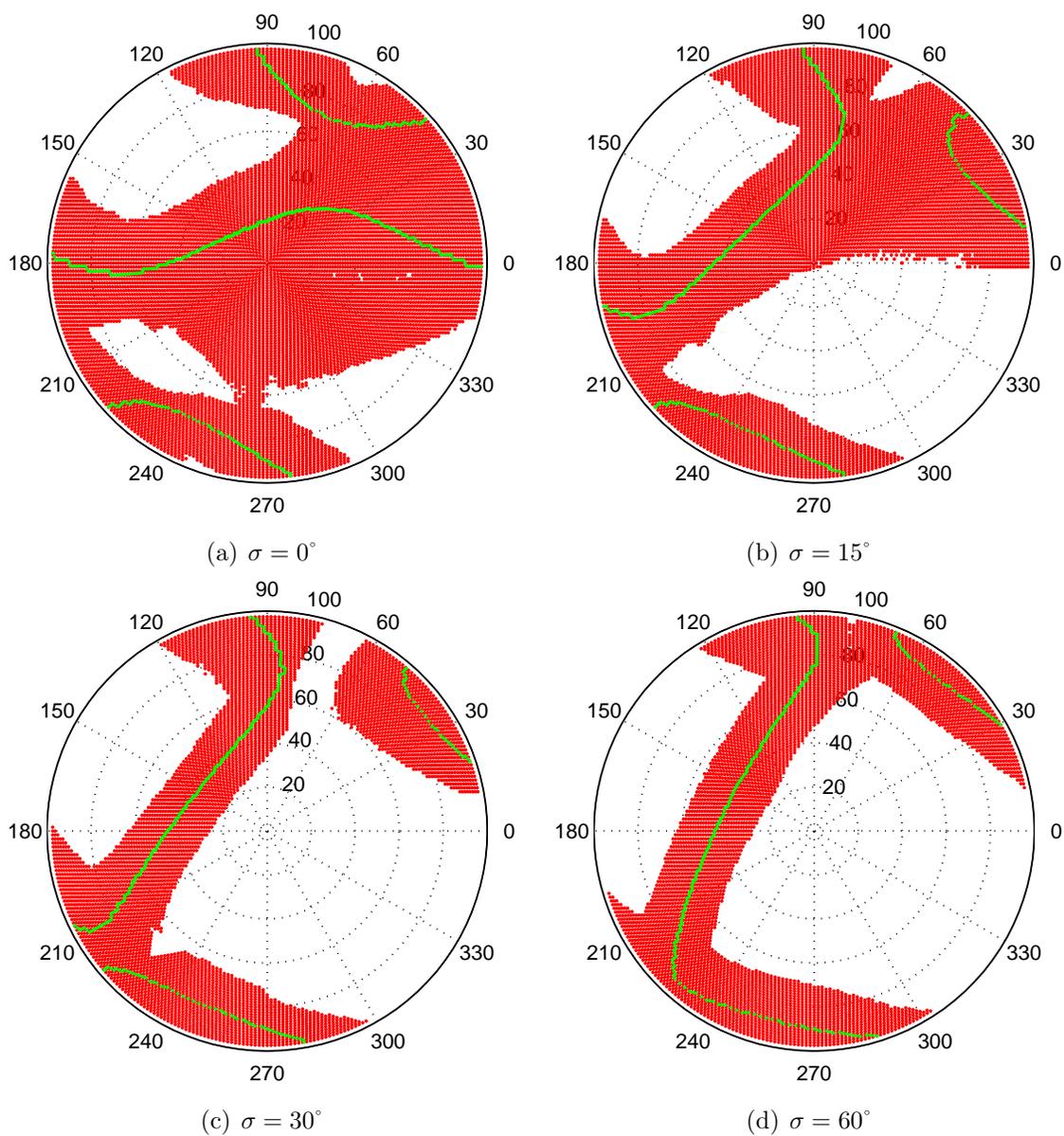


FIG. 5.37 – Zones singulières et courbes des singularités pour $\delta = 0,01$.

5.4.3 Dégradation de la dextérité et de la raideur

La figure 5.38 montre pour une torsion croissante ($\sigma = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ et 60°), des espaces ayant une dextérité de plus en plus élevée. La dextérité dépasse 0,2 pour $\sigma = 0^\circ$, dépasse 0,3 pour $\sigma = 15^\circ$, dépasse 0,4 pour $\sigma = 30^\circ$ et dépasse 0,5 pour $\sigma = 60^\circ$. Ces figures comprennent la dextérité sans jeu ni flexibilité, la dextérité lorsque $\delta = 0,01$ m (courbes plus épaisses) et les courbes des singularités (en vert).

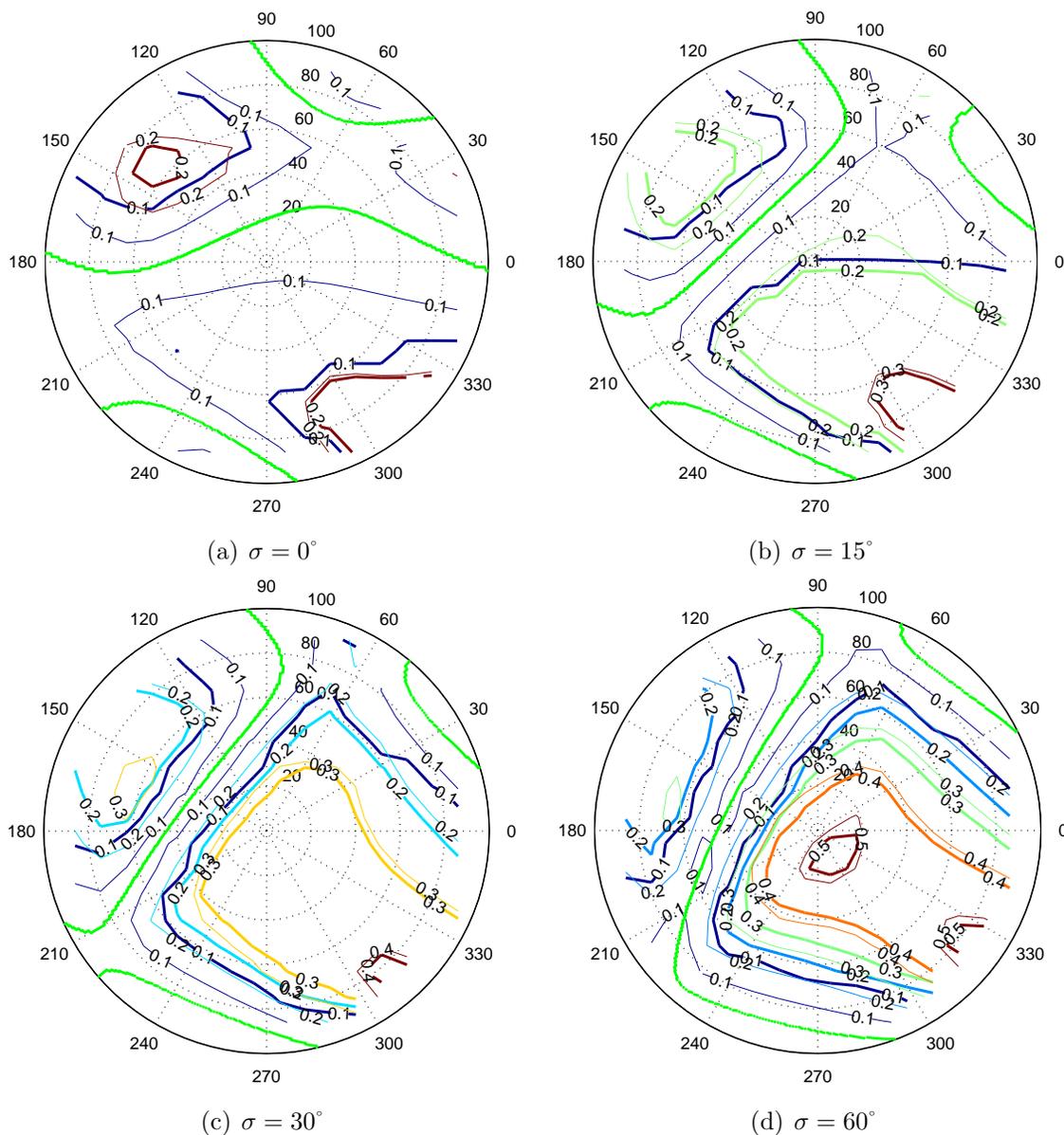


FIG. 5.38 – Variation de la dextérité pour $\delta = 0,01$ et courbes des singularités.

La figure 5.39 montre la distribution de la raideur autour de l'axe z , pour $\sigma = 15^\circ$ et $\sigma = 60^\circ$, sans jeu ni flexibilité, avec $\delta = 0,01$ m (courbes plus épaisses), ainsi que les courbes des singularités (en vert gras). À une torsion constante de 60° , la raideur dépasse 0.03 Nm/rad dans la plupart de l'espace de travail et dépasse 0.04 Nm/rad dans une grande partie de l'espace, centré à une inclinaison de 0° . Les résultats sont moins bons à une torsion constante de 15° . La plupart de l'espace de travail a une raideur de moins de 0.03 Nm/rad.

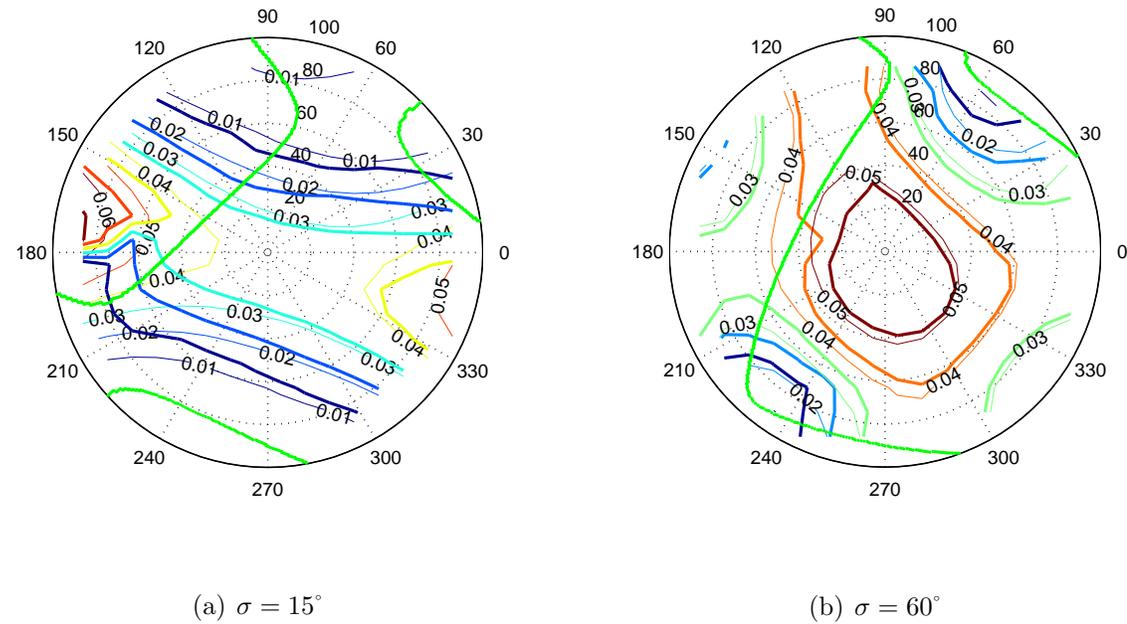


FIG. 5.39 – Variation de la raideur autour de l'axe z pour $\delta = 0,01$ et courbes des singularités.

5.4.4 Comparaison de la distribution de l'erreur et de la dextérité

L'espace de travail à quatre torsions constantes $\sigma = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ et 60° a été discrétisé de la façon suivante pour un total de 240 points :

$$\begin{aligned} \phi &= 0 : 15 : 345^\circ \\ \theta &= 10 : 10 : 100^\circ \end{aligned} \quad (5.5)$$

À tous ces points, l'erreur maximale (due à $\delta = 0,01$ m) et la dextérité ont été calculés. Dans le cas où une dextérité nulle était calculée, le point en question était enlevé. Les graphiques de la dextérité en fonction de l'erreur maximale sont à la figure 5.40. Les quatre graphiques ont la même échelle variant de 0 à 0,6 pour la dextérité. Les deux dernières courbes ont à la fois une meilleure dextérité, en général et une erreur plus faible. Toutes les courbes de tendance indiquent une augmentation de l'erreur maximale pour une plus faible dextérité. La tendance est plus prononcée pour $\sigma = 30^\circ$ et $\sigma = 60^\circ$, correspondant à des dextérités moyennes plus élevées.

5.5 Sommaire

Pour quatre architectures distinctes, l'effet d'une valeur combinée du jeu et de la flexibilité, δ , sur les propriétés des manipulateurs a été évalué.

La valeur de δ semble avoir une influence plus proportionnelle sur les dégénérescences possibles des propriétés cinématiques que sur l'étendue des zones singulières. Pour le manipulateur à deux DDL, la zone singulière associée à cinq différentes valeurs de δ a été tracée. Pour voir la zone doubler en superficie, il faut passer (approximativement) de $\delta = 0,001$ à $\delta = 0,005$ m ou de $\delta = 0,005$ à $\delta = 0,02$ m. Pour le même manipulateur, le jeu a été doublé en passant de $\delta = 0,02$ à $\delta = 0,04$ m. La perte de raideur due à chacune de ces valeurs a été calculée et elle avait à peu près doublé.

La zone singulière associée aux valeurs $\delta = 0,01$ et $\delta = 0,02$ m a été tracée sur un espace à orientation constante du 3-RPR plan. Bien que δ ait doublé, la zone singulière n'a pas pris beaucoup d'expansion.

La sensibilité au jeu et à la flexibilité est variable à l'intérieur de l'espace de travail. Des causes de dégradations plus prononcées des propriétés cinématiques à certains endroits de l'espace de travail ont été identifiées. De façon générale, lorsqu'une valeur non-nulle de δ est introduite, les courbes d'isodextérité et les courbes d'isoraideur se déplacent peu si elles ont une valeur élevée et se déplacent davantage pour des valeurs plus faibles. La dégradation des propriétés cinématiques est plus marquée si celles-ci sont déjà faibles. De plus, les espaces d'incertitudes (et donc les erreurs) sont plus grands s'ils se trouvent à l'intérieur des zones singulières.

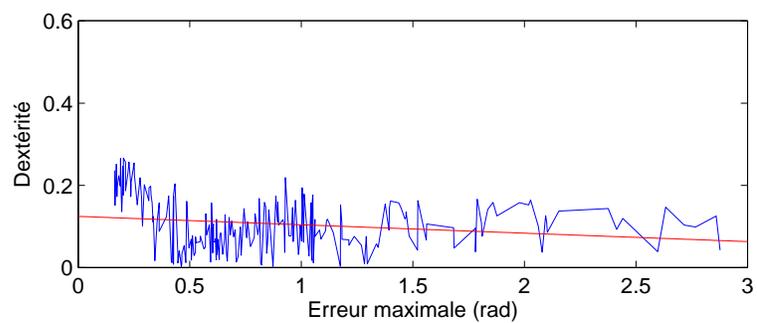
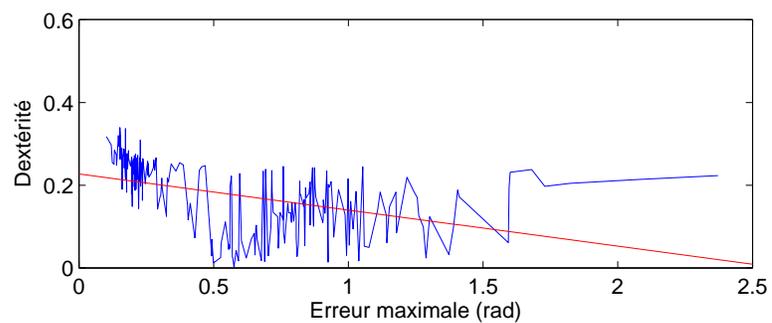
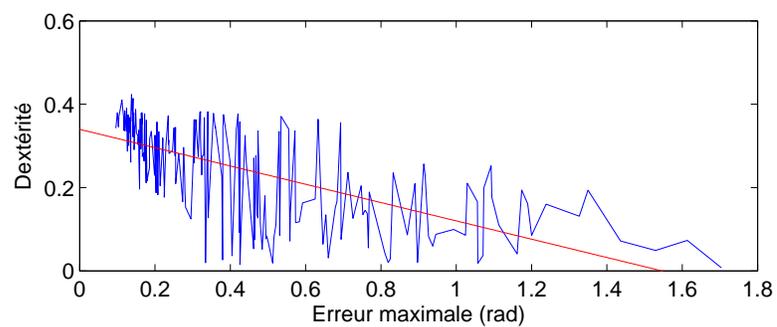
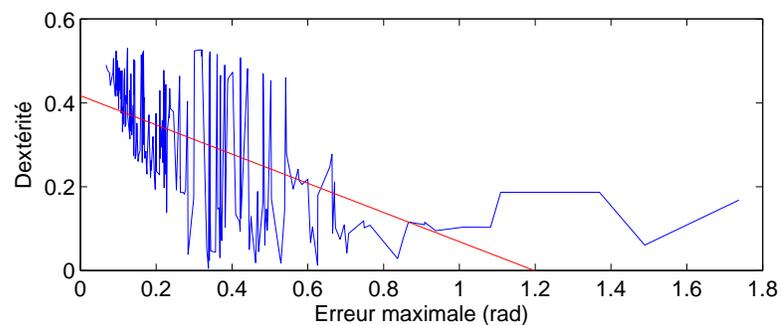
(a) $\sigma = 0^\circ$ (b) $\sigma = 15^\circ$ (c) $\sigma = 30^\circ$ (d) $\sigma = 60^\circ$

FIG. 5.40 – Dextérité en fonction de l'erreur maximale pour le manipulateur sphérique.

Un résultat intéressant pour les manipulateurs 3-RPR plan et 3-SPS sphérique est l'influence très marquée de la forme de la surface singulière en 3D sur l'étendue de la zone singulière à une orientation ϕ (3-RPR) ou une torsion σ (3-SPS) constante. Des courbes singulières qui varient très rapidement pour une petite variation de l'orientation ou de la torsion vont engendrer des zones singulières très étendues. Pour le cas du 3-RPR plan, ce sont les transitions ellipse-hyperboles et hyperboles-ellipse dont il faut s'éloigner. Le cas $\phi = 0^\circ$ où les courbes des singularités sont deux lignes droites doit absolument être évité puisque presque tout l'espace de travail utile disparaît pour se transformer en zone singulière.

À la fin de chaque section se trouve une comparaison de la dextérité et de l'erreur maximale. Dans aucun cas ne peut-on affirmer qu'une mesure locale de la dextérité suffit à prédire l'erreur locale associée. L'erreur due à un espace d'incertitude n'est pas inversement proportionnelle à la dextérité et peut même être plus faible dans une position de dextérité moindre. Il existe une tendance, très nette dans certains cas, d'une augmentation de l'erreur pour une diminution de la dextérité. Quelques courbes n'ont pas de tendance.

Au chapitre suivant, les mêmes types de résultats sont présentés, mais la nature différente des manipulateurs ayant des chaînes cinématiques de type RRR rend l'analyse des résultats un peu différente.

Chapitre 6

Résultats pour des manipulateurs avec articulations rotoïdes actionnées

Contrairement aux manipulateurs ayant des chaînes de type $R\underline{P}R$ ou de type $S\underline{P}S$, la taille de l'espace de travail des manipulateurs comprenant des articulations rotoïdes actionnées, déterminé par la longueur des membrures, est reliée aux propriétés cinématiques, ainsi qu'à l'erreur de positionnement. L'espace de travail ($2\text{-}\underline{R}RR$) ou l'espace de travail à orientation constante ($3\text{-}\underline{R}RR$) sera donc inclus dans toutes les figures.

Ce chapitre contient une étude de l'erreur de positionnement ($2\text{-}\underline{R}RR$ et $3\text{-}\underline{R}RR$) et d'orientation ($3\text{-}\underline{R}RR$) de l'organe terminal, l'obtention de la distribution des espaces d'incertitudes qui existent en raison du jeu et de la flexibilité, l'obtention des zones des

singularités et la dégradation possible des propriétés cinématiques, selon les méthodes présentées au chapitre 4. De plus, une comparaison de l'erreur (position et orientation) et des propriétés cinématiques est présentée.

6.1 Manipulateur plan à deux DDL

Le manipulateur qui sert d'exemple pour les résultats qui suivent est fixé à sa base, sur l'axe x , à 0 et à 1 ($\mathbf{r}_1 = [0 \ 0]^T$ et $\mathbf{r}_2 = [1 \ 0]^T$), où les dimensions sont données en mètres. Le chapitre 3 a montré les quatre solutions au PGI du 2-RRR. La solution avec coudes vers l'extérieur et la solution avec coudes vers l'intérieur donnent des résultats qui sont des copies miroir l'une de l'autre par rapport à l'axe x . Des résultats seront présentés pour la solution avec coudes vers l'extérieur et cette solution sera nommée la *solution 1* dans ce qui suit. La solution avec coudes vers la gauche et celle avec coudes vers la droite donnent des résultats très semblables. La solution avec coudes vers la droite correspond à la *solution 2* dans ce qui suit. À moins d'indication contraire :

- le jeu et la flexibilité dans les membrures distales (tension/compression) prennent une valeur combinée $\delta = 0,02$ m ;
- la variation de l'angle des articulations actionnées, une fois immobilisées, est de $\pm 0,01$ radian, selon le modèle présenté pour la flexion de tiges encastrées.

Ces valeurs sont utiles pour l'obtention de l'espace d'incertitude. Puisqu'on ne connaît pas les torseurs appliqués, on prend les valeurs extrêmes des déplacements (voir la fin de la sous-section 4.3.2 et la section 4.4).

La figure 6.1 montre, pour la solution 1, une distribution des espaces d'incertitudes dus au jeu et à la flexibilité (en rouge) dans l'espace de travail (arcs de cercle bleus). Les dimensions choisies des membrures donnent un manipulateur qui aura, en général, de faibles erreurs de positionnement. Les dimensions en mètres sont données dans le tableau 6.1.

Dans la figure 6.1, la courbe des singularités (courbes en vert gras) a été ajoutée, ainsi que le manipulateur à une position choisie. On peut constater, à l'aide de la figure, que le manipulateur atteindra les limites internes de son espace atteignable avant que ses membrures distales soient alignées. C'est ce qui explique qu'il existe peu

Membrures proximales	
$L_1 = 1,0$	$L_2 = 1,2$
Membrures distales	
$L_3 = 1,7$	$L_4 = 1,7$

TAB. 6.1 – Architecture du 2-RRR, solution 1.

de configurations singulières possibles avec les dimensions choisies.

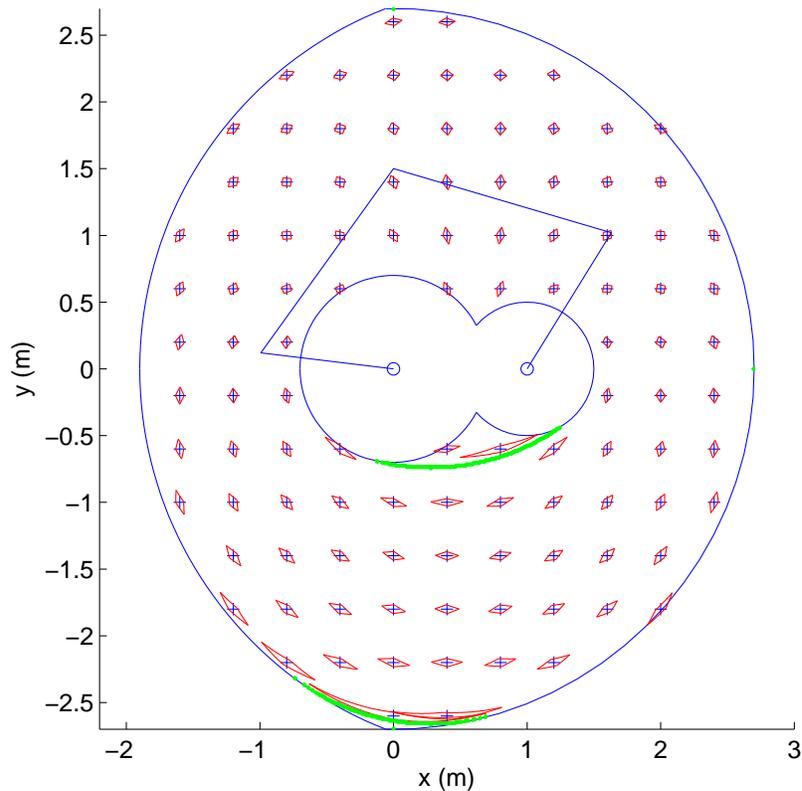


FIG. 6.1 – Espaces d'incertitudes dus au jeu et à la flexibilité : solution 1.

La figure 6.2 montre, pour la solution 2, une distribution des espaces d'incertitudes dus au jeu et à la flexibilité. Dans le cas de la solution 2, toutes les dimensions qu'il serait possible de choisir donnent des courbes des singularités semblables et des zones où l'espace d'incertitude dû au jeu et à la flexibilité est considérable. Les singularités sont toujours constituées de deux ou trois courbes qui divisent l'espace de travail en deux moitiés (qui sont égales si les deux pattes sont identiques). La figure 6.3 contient six exemples de manipulateurs avec chacun son espace de travail, ses courbes des singu-

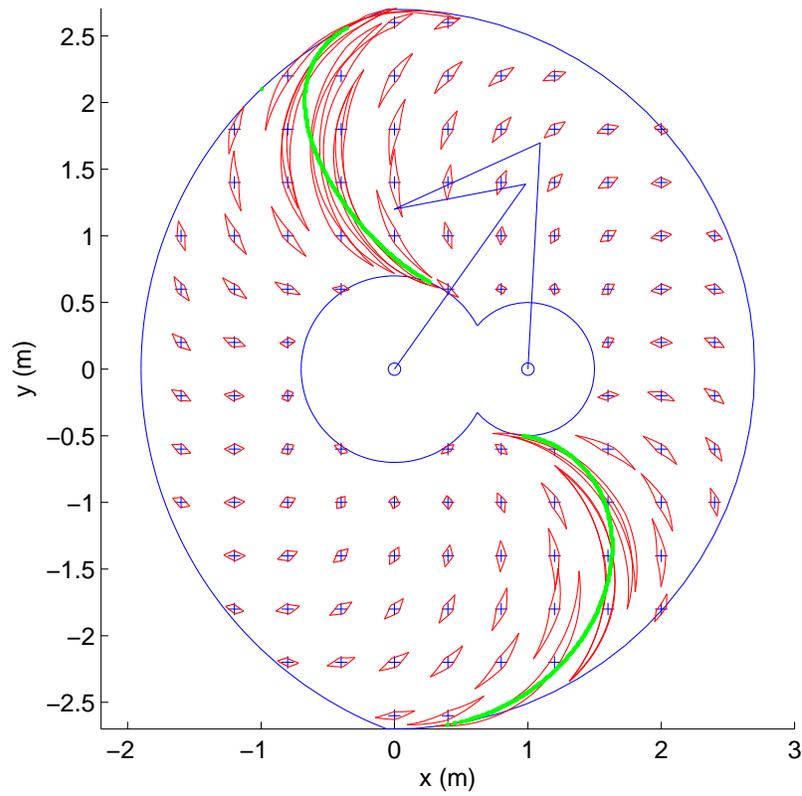


FIG. 6.2 – Espaces d’incertitudes dus au jeu et à la flexibilité : solution 2.

larités (en vert), un espace d’incertitude et le manipulateur dans la configuration correspondante. L’allure générale des courbes est toujours la même. Sur les deux courbes des singularités identiques, les membrures distales sont repliées l’une sur l’autre. Les espaces d’incertitudes associés à ces positions sont toujours grands.

Les dimensions choisies sont données en mètres dans le tableau 6.2.

Membrures proximales	
$L_1 = 1,7$	$L_2 = 1,7$
Membrures distales	
$L_3 = 1,0$	$L_4 = 1,2$

TAB. 6.2 – Architecture du 2-RRR, solution 2.

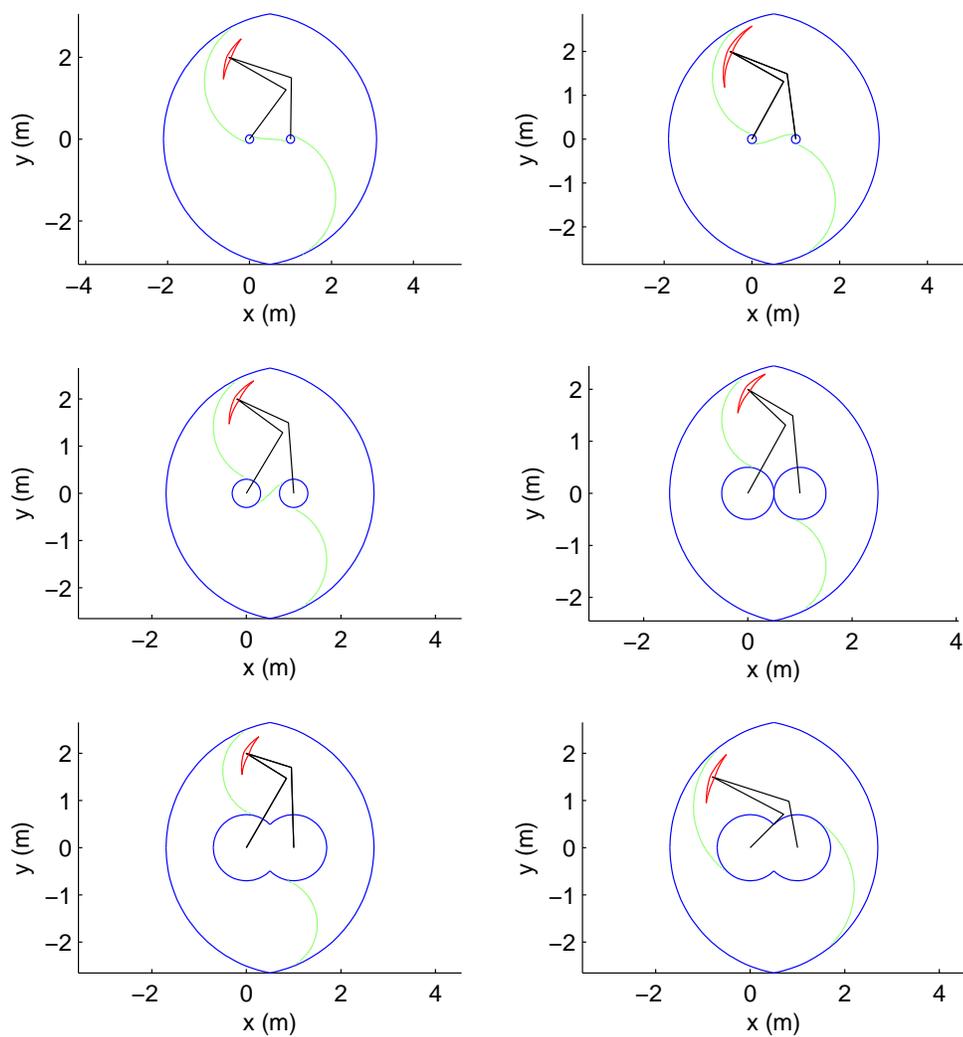


FIG. 6.3 – Courbes des singularités pour la solution 2.

Lorsque les deux coudes du manipulateur pointent du même côté, il y aura toujours une courbe de singularités pour $y > 0$ et une autre pour $y < 0$ (approximativement) qui correspond aux deux membrures distales repliées l'une sur l'autre.

L'erreur de positionnement, la variation de la dextérité et la variation de la raideur qui résultent des jeux aux articulations et de la flexibilité sont présentées dans les sous-sections suivantes.

6.1.1 Erreur de position

Avec les actionneurs immobiles, le mouvement possible selon les axes x et y est identifié pour les solutions 1 et 2 précédentes, avec les dimensions présentées pour chacun.

Pour la solution 1, la figure 6.4 présente le mouvement possible selon les axes x et y , respectivement. Les arcs de cercle bleus sont les limites de l'espace de travail. Puisque les erreurs importantes sont très localisées, seulement une partie de l'espace de travail est montrée. Dans l'espace de travail qui n'est pas montré, l'erreur se situe partout en-dessous de la valeur de 0,5 m. Les déplacements les plus grands sont de l'ordre de 3 m dans les deux figures. Un tel déplacement peut sembler invraisemblable, mais correspond bien à la réalité. La figure 6.5 explique la situation. Elle contient le manipulateur dessiné à la position $\mathbf{p} = [0,6 \quad -0,72]^T$ m et l'espace d'incertitude. Puisque les membrures distales ont les mêmes dimensions, certains points de l'espace de travail (les singularités) permettent aux articulations passives d'être superposées et donc aux membrures distales de faire un tour complet. En évitant ces petites zones dangereuses, on obtient un grand espace exempt de singularités.

La même échelle que celle employée dans la figure 6.4 a été utilisée pour présenter les mouvements possibles de la solution 2. Les résultats sont montrés à la figure 6.6. Trois niveaux d'erreur sont tracés : 0,5, 1,0 et 1,5 m. Les zones où les mouvements possibles sont supérieurs à 0,5 m sont plus étendues que dans le cas de la solution 1. Par contre, les plus grands mouvements enregistrés pour la solution 2 sont inférieurs à ceux obtenus pour la solution 1. Ces mouvements selon les axes x et y sont inférieurs à 2 m.

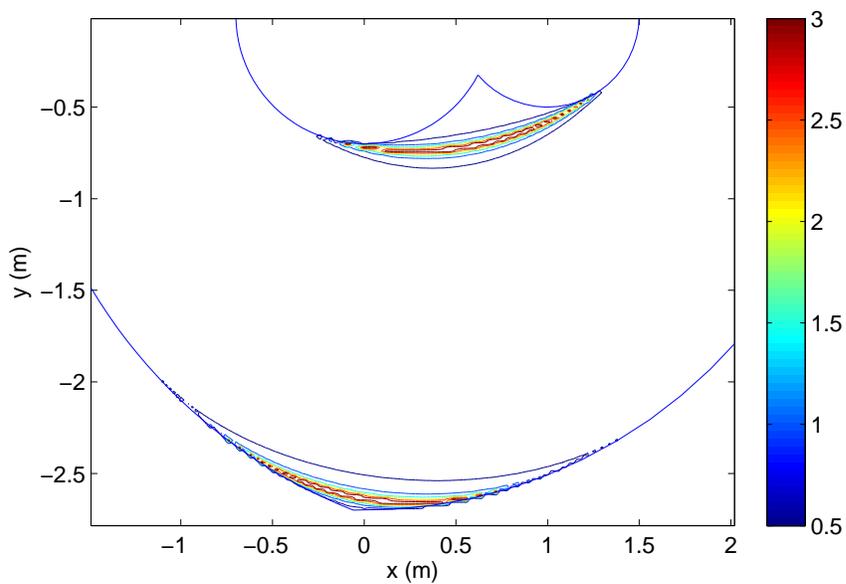
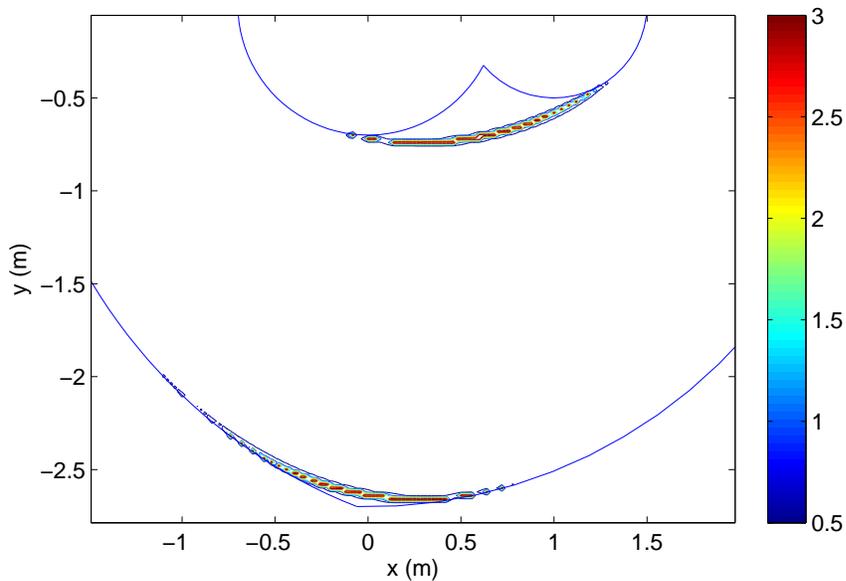
(a) selon l'axe x (b) selon l'axe y

FIG. 6.4 – Mouvement possible de l'organe terminal : solution 1.

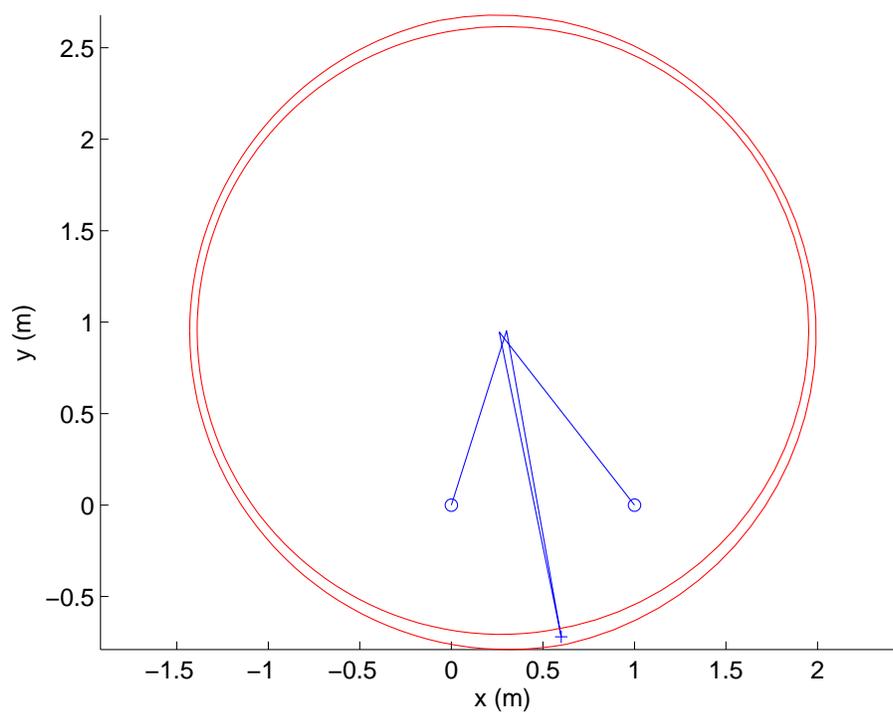


FIG. 6.5 – Manipulateur à un point choisi de l'espace de travail et l'espace d'incertitude correspondant : solution 1.

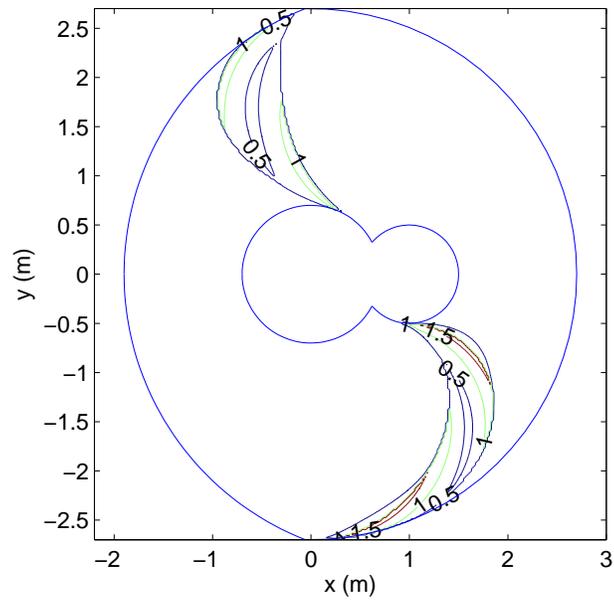
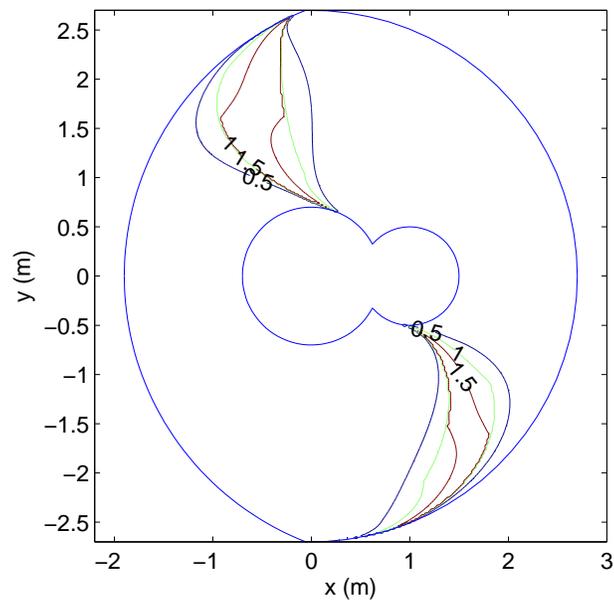
(a) selon l'axe x (b) selon l'axe y

FIG. 6.6 – Mouvement possible de l'organe terminal : solution 2.

6.1.2 Zones des singularités et dextérité

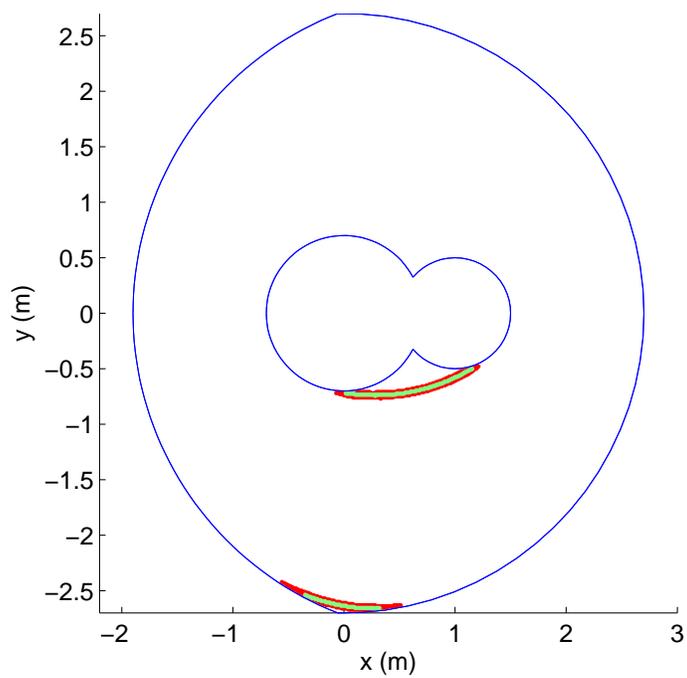
Il y a un lien entre la taille et la forme des espaces d'incertitudes présentés précédemment, surtout près des courbes des singularités et la forme des zones des singularités. Les figures 6.7a et 6.7b montrent les zones des singularités (ainsi que la courbe des singularités en vert) pour les solutions 1 et 2, respectivement. Les arcs de cercle bleus sont les limites de l'espace de travail. Dans le cas de la solution 1, la zone des singularités est assez restreinte. Ce résultat aurait pu être prédit à l'aide de la figure 6.1. Près de la courbe des singularités, les espaces d'incertitudes ont une forme allongée qui sont à peu près parallèles à la courbe des singularités. Le mouvement permis par le jeu et la flexibilité n'a donc pas tendance à rapprocher le mécanisme d'une configuration singulière. Les zones des singularités pour la solution 2 sont plus étendues. La figure 6.2 montre des espaces d'incertitudes allongés moins parallèles, en général, aux courbes des singularités.

La solution 1 donne un mécanisme ayant une très bonne dextérité, surtout dans la moitié supérieure de son espace de travail. Comme on peut le voir dans la figure 6.8, une très grande proportion de l'espace de travail a une dextérité supérieure à 0,5, même lorsque l'on considère le jeu et la flexibilité (courbes plus épaisses). Une petite partie de l'espace de travail a une dextérité supérieure à 0,9. Les isodextérités ne bougent pas beaucoup lorsque le jeu et la flexibilité sont considérés.

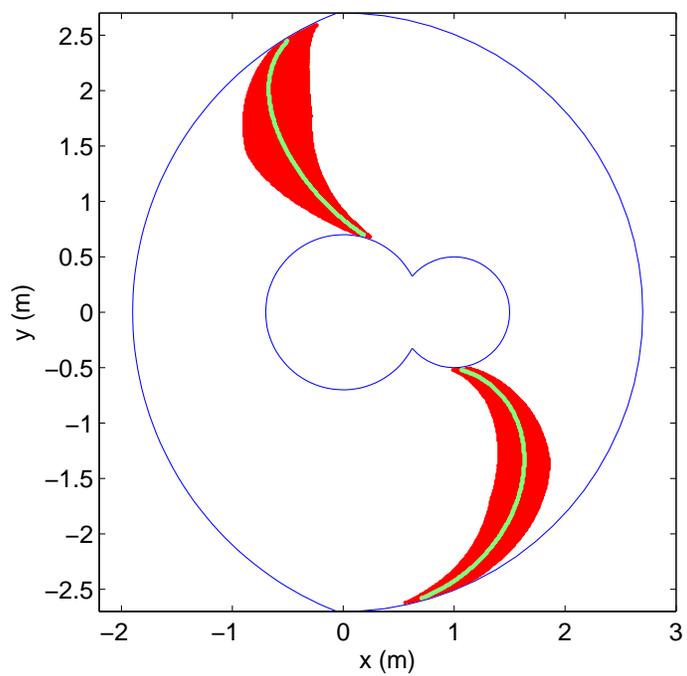
La solution 2 n'a pas le même comportement. Quelques petites parties de l'espace de travail ont une dextérité supérieure à 0,5 et aucune partie de l'espace de travail a une dextérité supérieure à 0,9 lorsque l'on considère le jeu et la flexibilité. De plus, la dégradation de la dextérité est plus marquée pour la solution 2 que pour la solution 1 : les isodextérités ont un déplacement plus grand.

6.1.3 Dégradation de la raideur

Dans cette sous-section, les courbes qui représentent les résultats sujets au jeu et à la flexibilité sont plus épaisses. Dans les figures 6.9a), 6.9b) et 6.10b), les courbes des singularités sont tracées en vert (gras) et dans la figure 6.10a), elles sont tracées en rouge (puisqu'il s'y trouve déjà du vert). Les arcs de cercle bleus sont les limites de

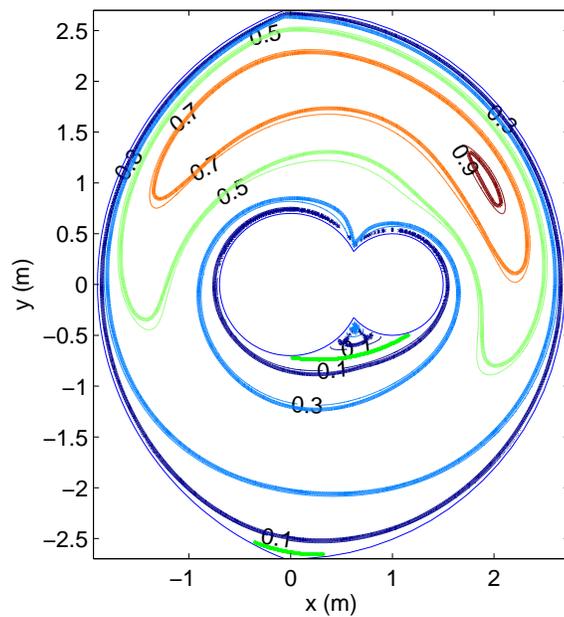


(a) solution 1

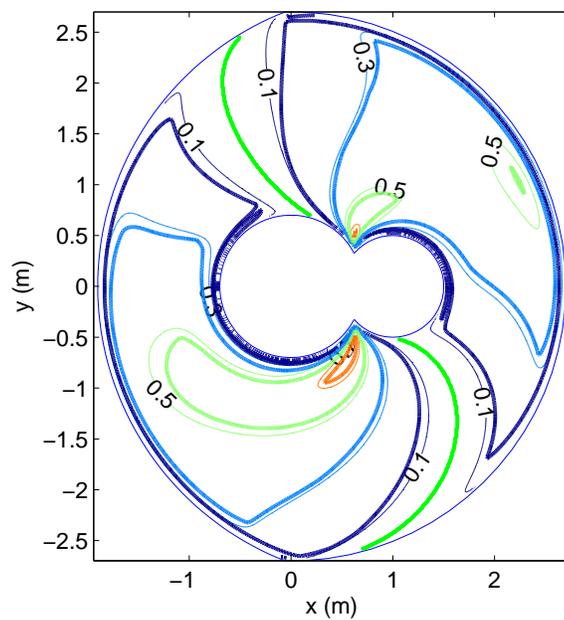


(b) solution 2

FIG. 6.7 – Zones singulières et courbe des singularités.



(a) solution 1



(b) solution 2

FIG. 6.8 – Dexterité avec et sans le jeu et la flexibilité et les courbes des singularités.

l'espace de travail.

La figure 6.9 montre la distribution de la raideur selon l'axe x , pour les solutions 1 et 2, respectivement. La solution 1 est clairement meilleure que la solution 2. Environ la moitié de son espace de travail correspond à une raideur supérieure à 0,9 N/m, la presque totalité correspond à une raideur supérieure à 0,6 N/m et les courbes se déplacent moins qu'à la solution 2 sous l'effet du jeu et de la flexibilité.

La figure 6.10 montre la distribution de la raideur selon l'axe y pour les solutions 1 et 2, respectivement. La solution 1 est encore une fois supérieure. Pour la solution 2, très peu de l'espace de travail correspond à une raideur de plus de 0,6 N/m, alors que la plupart de l'espace de travail de la solution 1 a une raideur d'au moins 0,6 N/m. En général, les courbes d'isoraideur se déplacent moins pour la solution 1.

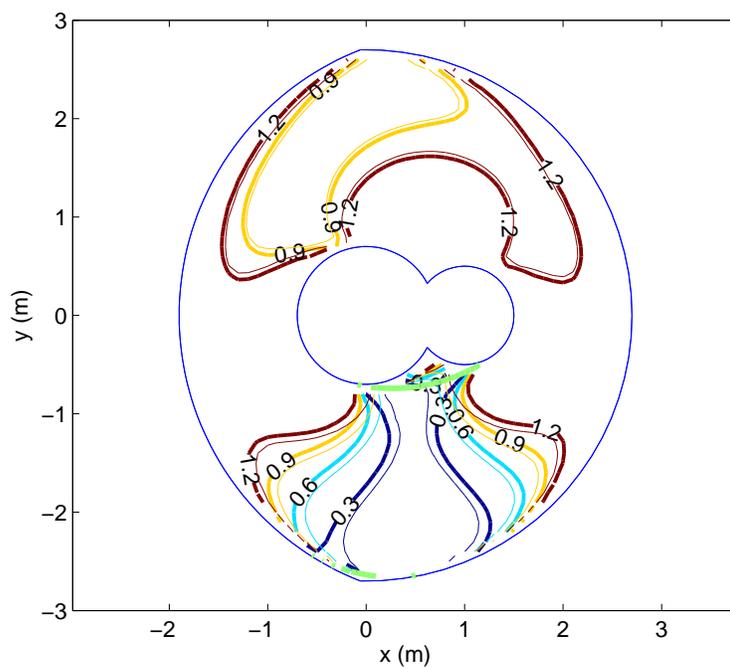
6.1.4 Comparaison de la distribution de l'erreur et de la dextérité

Deux boîtes exemptes de singularités pour les solutions 1 et 2 ont été discrétisées avec un intervalle de 0,01 m (selon les axes x et y). Les boîtes sont montrées à la figure 6.11 qui comprend les courbes d'isodextérités, les courbes des singularités (en vert gras) ainsi que les limites de l'espace de travail (arcs de cercle bleus).

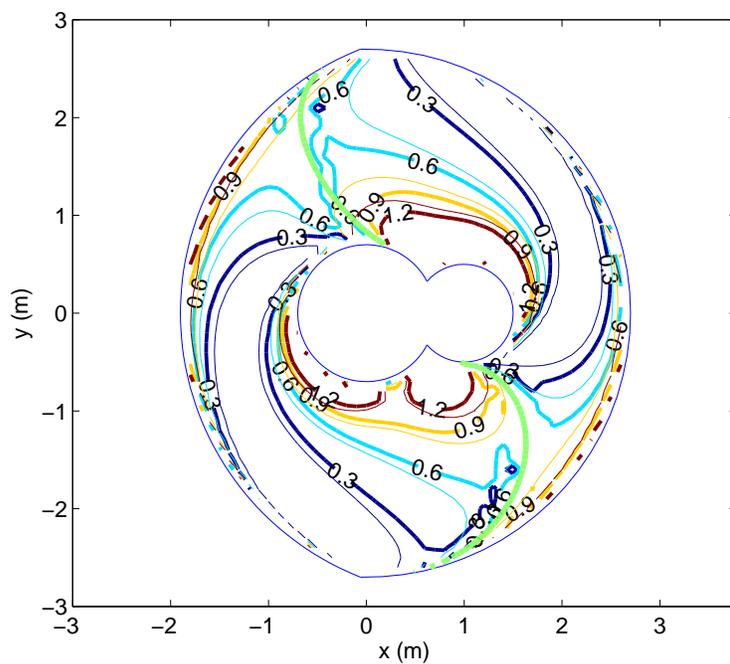
À tous ces points, l'erreur maximale (due à un jeu $\delta = 0,02$ m) et la dextérité ont été calculés. La figure 6.12 montre les graphiques de la dextérité tracée en fonction de l'erreur maximale. La tendance est claire pour chaque graphique : la dextérité moyenne d'un intervalle diminue alors que son erreur maximale moyenne augmente.

6.2 Manipulateur plan à trois DDL

La base fixe du 3-RRR plan est décrite par les trois vecteurs \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 et \mathbf{r}_3 présentés dans le tableau 6.3. Ceux-ci sont exprimés en mètres et selon le système d'axes fixe et par rapport à l'origine de ce système. La plate-forme mobile est décrite par les

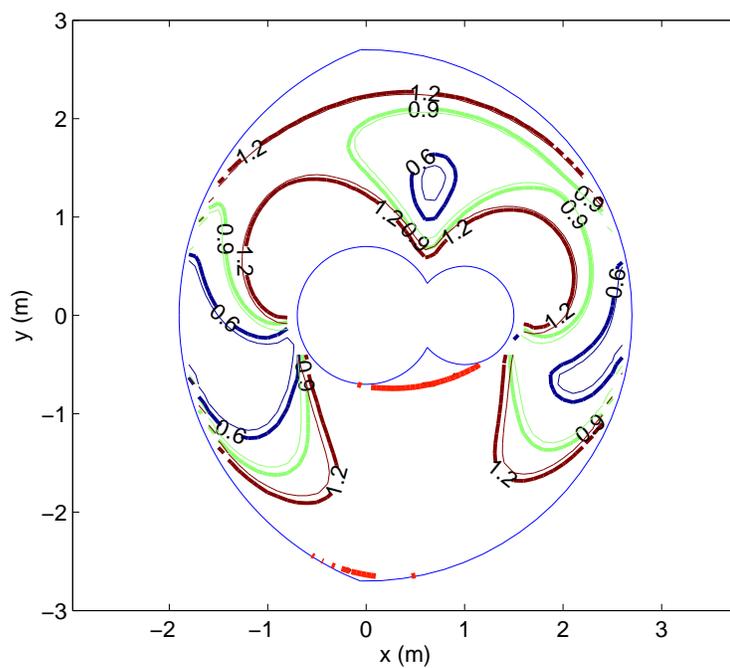


(a) solution 1

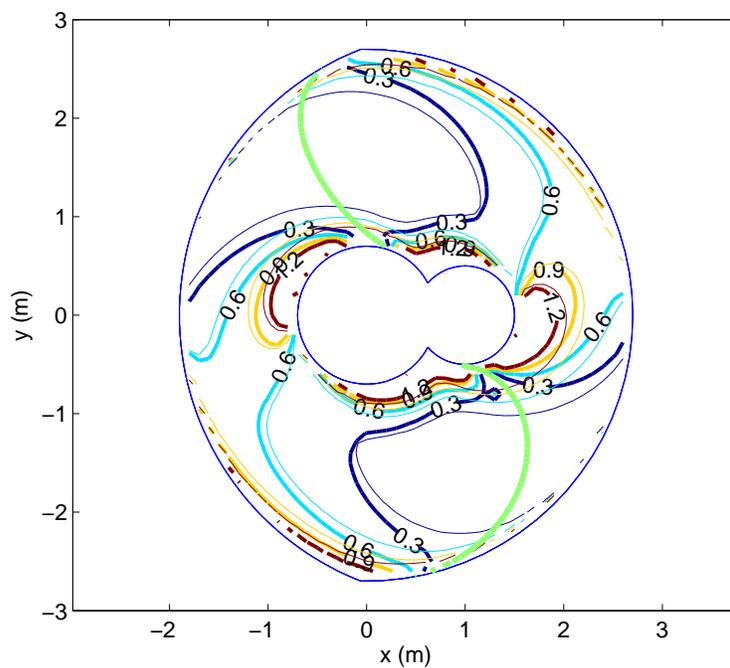


(b) solution 2

FIG. 6.9 – Raideur selon l'axe x avec et sans le jeu et la flexibilité.



(a) solution 1



(b) solution 2

FIG. 6.10 – Raideur selon l'axe y avec et sans le jeu et la flexibilité.

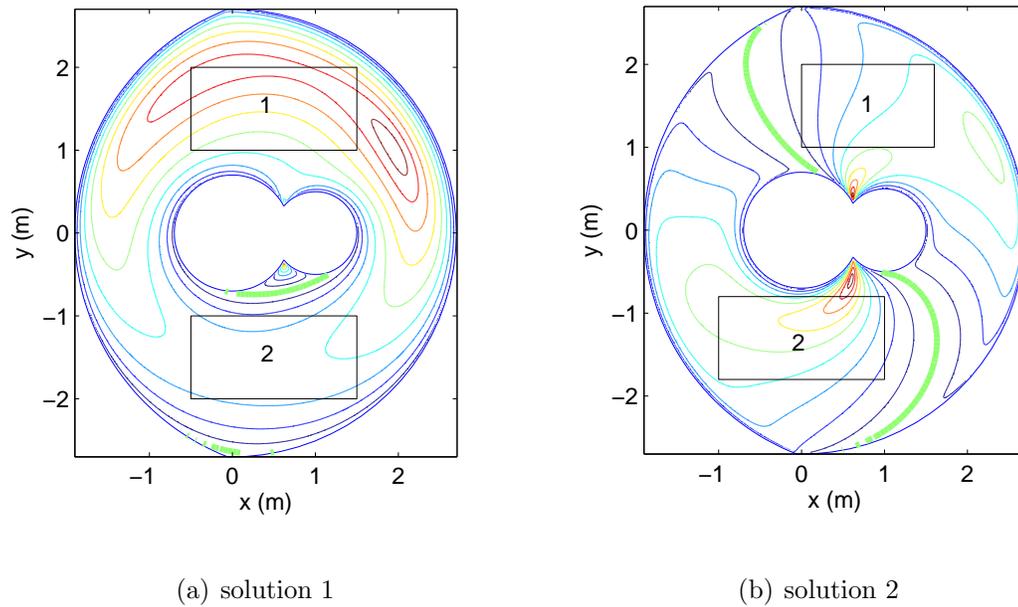


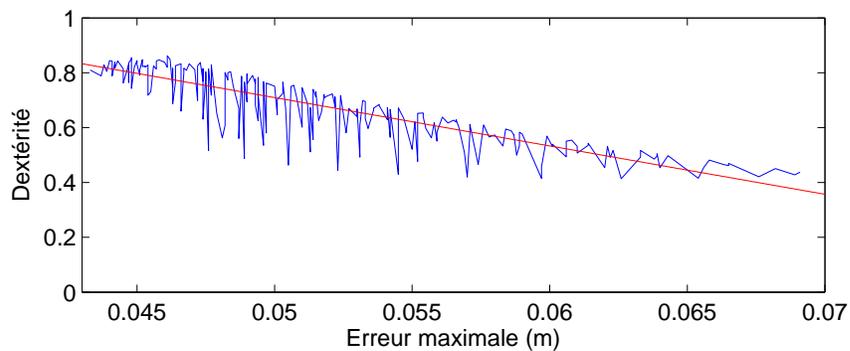
FIG. 6.11 – Les boîtes discrétisées dans chaque espace de travail.

trois vecteurs \mathbf{s}_{01} , \mathbf{s}_{02} et \mathbf{s}_{03} aussi présentés dans le tableau. Ces derniers vecteurs sont exprimés en mètres et par rapport au système d'axes mobile attaché à la plate-forme, l'origine étant l'emplacement de l'organe terminal. Tous les résultats présentés dans cette section sont ceux obtenus pour cette architecture. Les membrures proximales ont toutes une longueur de 1,5 m et les membrures distales ont toutes une longueur de 1,2 m.

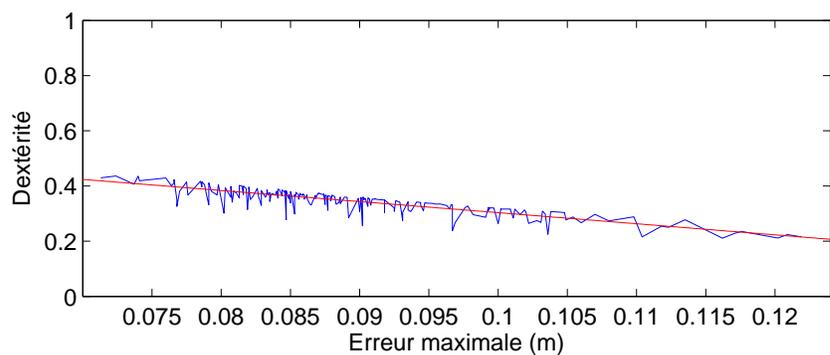
base	plate-forme
$\mathbf{r}_1 = [0 \quad 0]^T$	$\mathbf{s}_{01} = [-0,2 \quad -0,2]^T$
$\mathbf{r}_2 = [1 \quad 0]^T$	$\mathbf{s}_{02} = [0,2 \quad -0,2]^T$
$\mathbf{r}_3 = [0,3 \quad 1]^T$	$\mathbf{s}_{03} = [0 \quad 0,2]^T$

TAB. 6.3 – Architecture du 3-RRR plan.

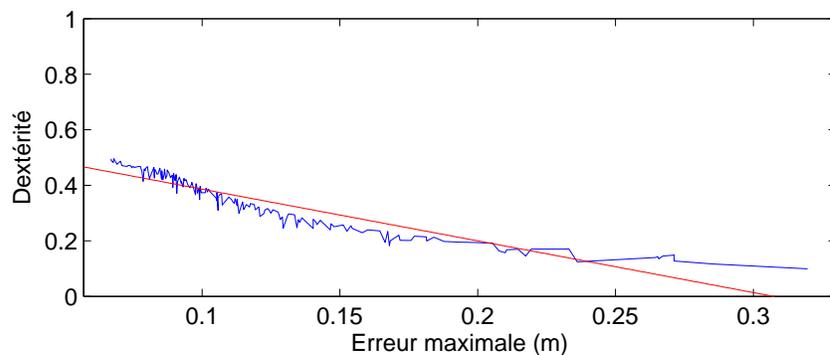
Il existe un total de huit solutions au PGI. Toutefois, certaines d'entre elles se ressemblent et il n'est pas nécessaire de les étudier toutes. Chacune des trois pattes a deux solutions. Si l'angle θ entre les deux membrures (distale et proximale) est de 0° lorsque celles-ci sont alignées et dépliées, les deux solutions au PGI sont : $\theta \leq 0^\circ$ et $\theta \geq 0^\circ$. Si les résultats obtenus pour $\theta_{i,distale} \leq 0^\circ$ pour $i = 1, 2, 3$ et les résultats obtenus pour $\theta_{i,distale} \geq 0^\circ$ pour $i = 1, 2, 3$ sont comparés, on constate qu'ils sont une copie miroir



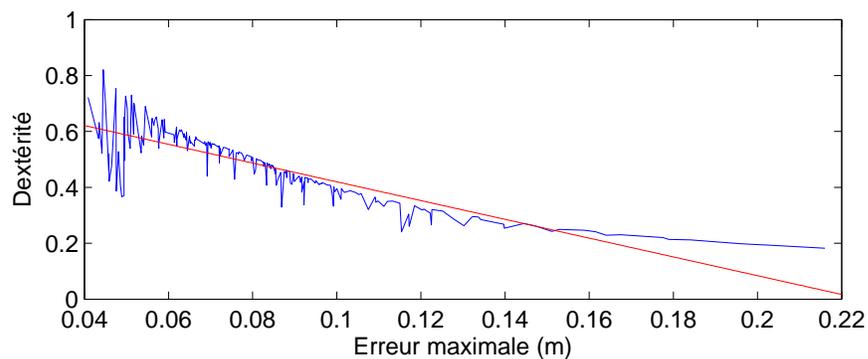
(a) solution 1, boîte 1



(b) solution 1, boîte 2



(c) solution 2, boîte 1



(d) solution 2, boîte 2

FIG. 6.12 – Dextérité en fonction de l'erreur maximale pour le manipulateur 2-RRR plan.

l'une de l'autre, tel que montré à la figure 6.13. Par le terme *résultat*, on entend : courbes des singularités, zones singulières, précision de la position, dégradation des propriétés cinématiques, etc... tous pour une orientation constante choisie du manipulateur. Dans la figure 6.13, on peut voir l'espace de travail à une orientation constante

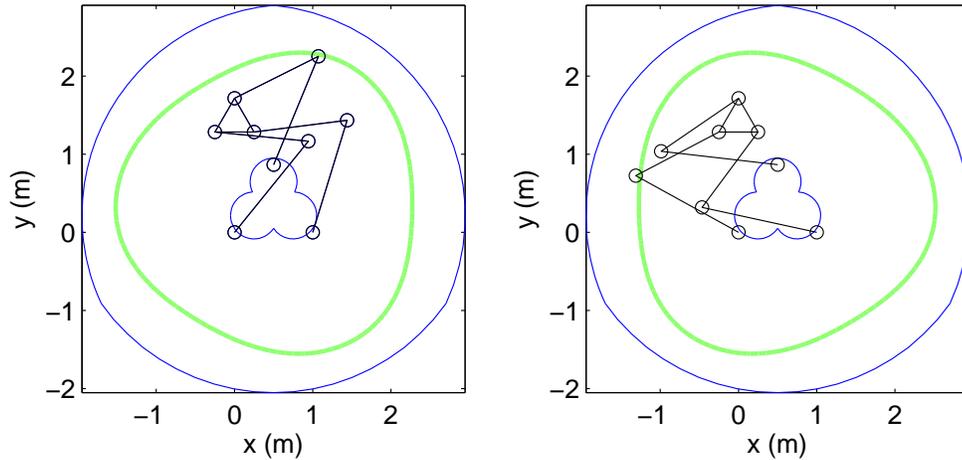


FIG. 6.13 – Espace de travail, courbes des singularités et manipulateur pour deux solutions au PGI.

de 0° , les courbes des singularités et le manipulateur à la position $(x, y) = (0, 1,5)$. Les courbes des singularités sont exactement des copies miroir parce que le manipulateur est symétrique. Sa base fixe et sa plate-forme mobile sont des triangles équilatéraux et les trois pattes sont identiques. Si un manipulateur n'est pas tout à fait symétrique, les courbes ne seront pas exactement symétriques. Pour les dimensions données au tableau 6.3, le manipulateur n'est pas symétrique, mais suffisamment pour que les résultats se ressemblent.

Les six autres solutions au PGI sont équivalentes si un manipulateur est symétrique et sont de plus en plus semblables si un manipulateur se rapproche de la symétrie. Pour ces solutions, il y a toujours une patte qui n'a pas la même solution que les deux autres. Les résultats obtenus avec ces solutions ont subi une rotation de 120° ou 240° dans le plan xy et peuvent aussi être des copies miroir ayant subi une rotation de 0° , 120° ou 240° . La figure 6.14 montre les six solutions : espace de travail à une orientation constante de 0° , la courbe des singularités et le manipulateur à la position $(x, y) = (0, 1,5)$.

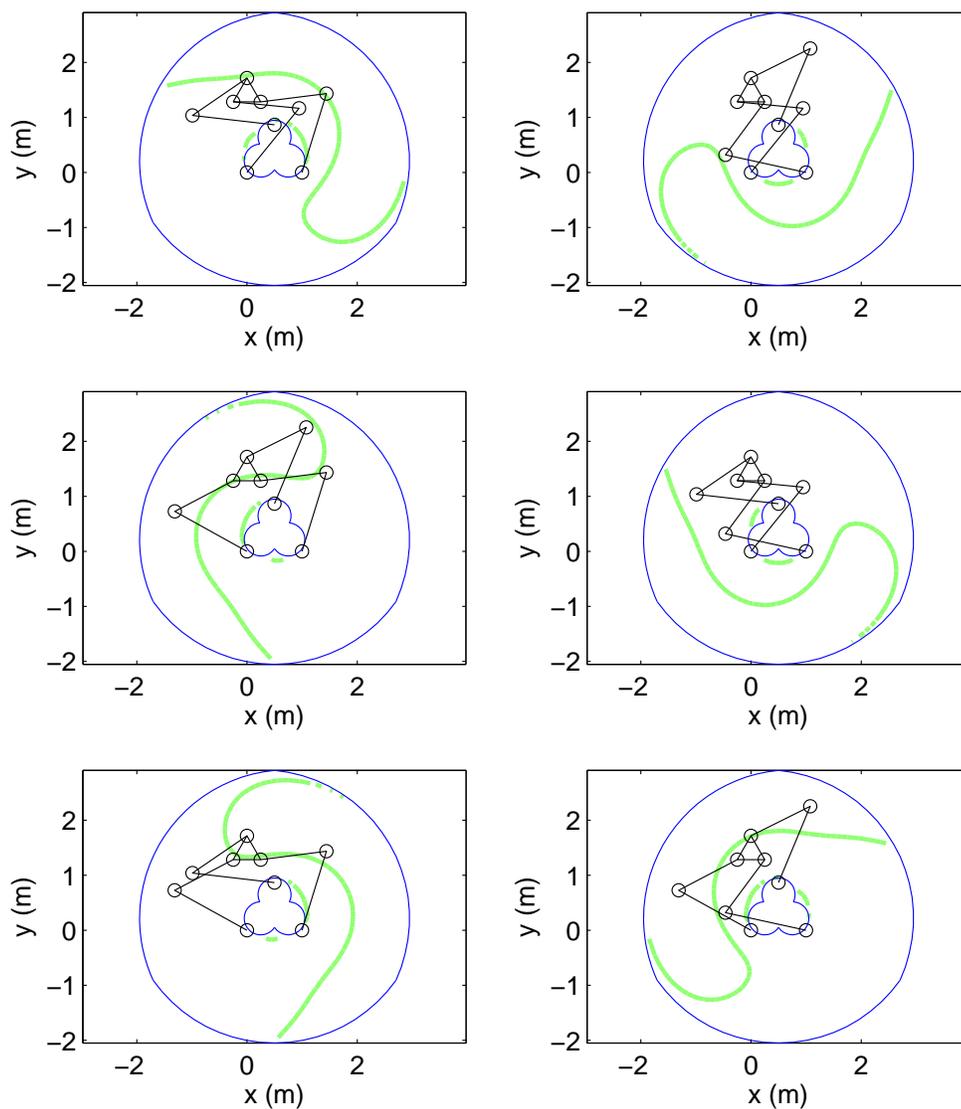


FIG. 6.14 – Espace de travail, courbes des singularités et manipulateur pour six solutions au PGI.

Les résultats présentés dans ce qui suit correspondent tous à deux orientations constantes choisies : $\phi = 0^\circ$ et $\phi = -60^\circ$. Ces deux orientations donnent des résultats très opposés. Le jeu dans les articulations rotoïdes passives et les déformations longitudinales dans les membrures distales prennent une valeur totale de 0,01 ou 0,02 (selon ce qui est indiqué) et la flexion dans les membrures proximales est modélisée par le déplacement angulaire maximal de $\pm 0,01$ radian (une fois les articulations immobilisées). Les deux solutions au PGI choisies sont :

1. $\theta_{1,distale}, \theta_{2,distale}$ et $\theta_{3,distale} \geq 0^\circ$
2. $\theta_{1,distale}$ et $\theta_{2,distale} \geq 0^\circ, \theta_{3,distale} \leq 0^\circ$

Il y aura premièrement une étude sur le mouvement permis par le jeu et la flexibilité : les erreurs de positionnement et d'orientation occasionnées par ceux-ci. Suivra ensuite une présentation des zones singulières obtenues et enfin l'étude de la dégradation de la dextérité et de la raideur.

6.2.1 Erreur de position et d'orientation

Les figures 6.15 et 6.16 montrent les espaces d'incertitudes dus au jeu et à la flexibilité (en rouge) pour différentes positions choisies de l'organe terminal (croix bleues), aux deux orientations constantes choisies ($\phi = 0^\circ$ et $\phi = -60^\circ$), pour la solution 1. Les arcs de cercle bleus sont les limites de l'espace de travail. Les deux figures suivantes : 6.17 et 6.18 montrent les espaces d'incertitudes aux deux mêmes orientations constantes, pour la solution 2. Dans ces quatre cas, la valeur combinée de δ (jeu et flexibilité) est de 0,02 m.

Les figures 6.19 et 6.20 montrent la variation possible de l'orientation lorsque les actionneurs sont immobilisés et ce, pour les mêmes orientations constantes choisies ($\phi = 0^\circ$ et $\phi = -60^\circ$), pour la solution 1. δ prend également une valeur de 0,02 m ici. Les valeurs sont grandes, mais elles représentent la variation totale possible de ϕ et non l'erreur possible sur ϕ . Un point de l'espace de travail à l'orientation constante de 0° a été choisi pour tracer l'espace d'incertitude dans le plan $x\phi$. Selon la figure 6.19, l'espace d'incertitude au point $(x, y) = (0, -1,7)$ devrait avoir une variation totale de presque 45° , ce qui est démontré sur la figure 6.21.

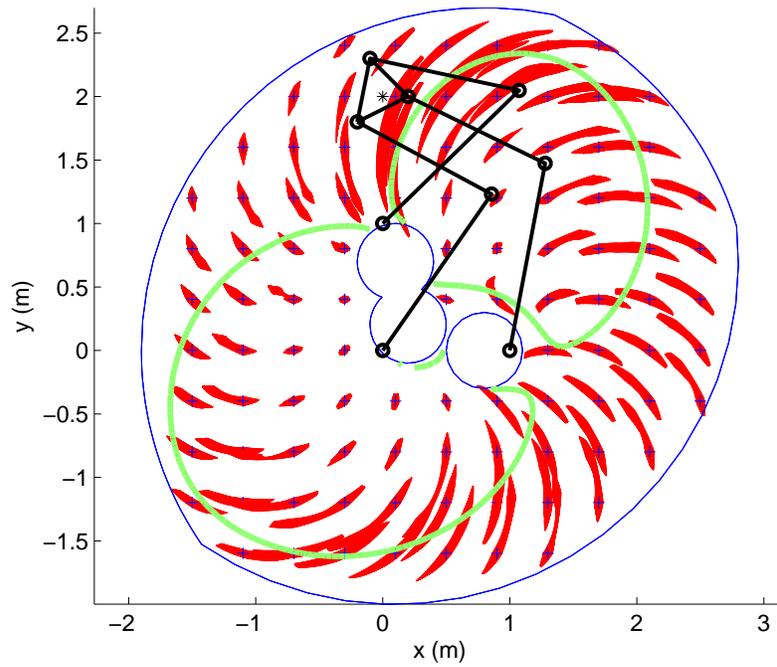


FIG. 6.15 – Espaces d’incertitudes pour $\phi = 0^\circ$, avec $\delta = 0,02$ m : solution 1.

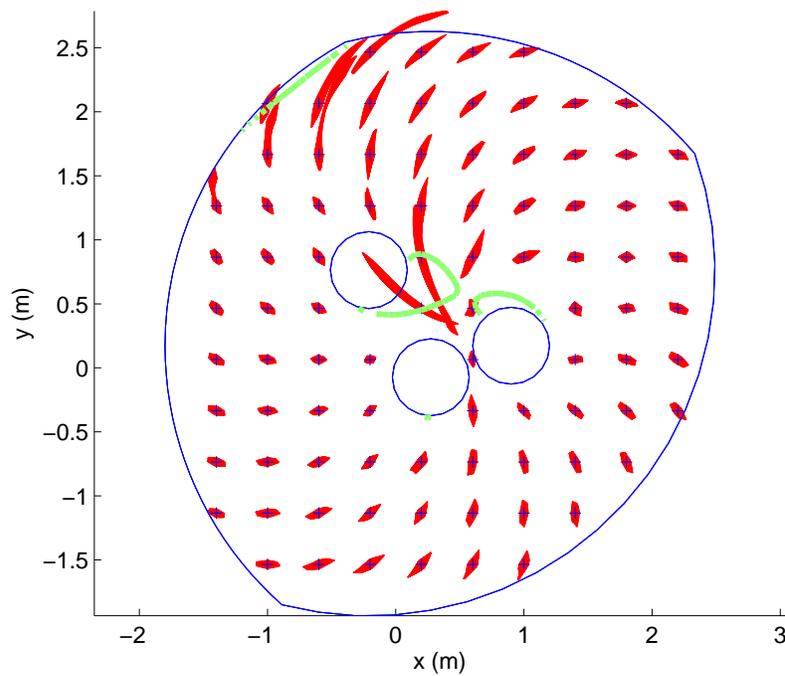


FIG. 6.16 – Espaces d’incertitudes pour $\phi = -60^\circ$, avec $\delta = 0,02$ m : solution 1.

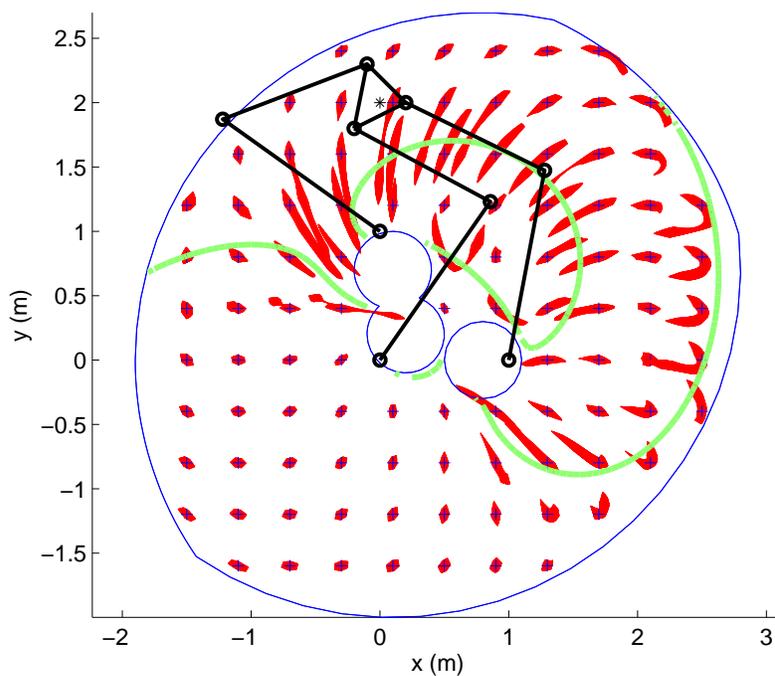


FIG. 6.17 – Espaces d’incertitudes pour $\phi = 0^\circ$, avec $\delta = 0,02$ m : solution 2.

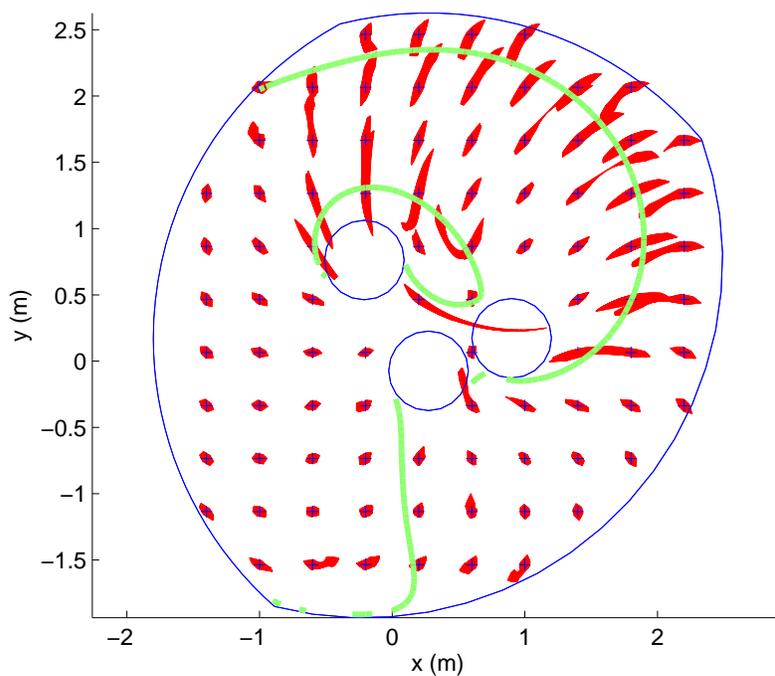


FIG. 6.18 – Espaces d’incertitudes pour $\phi = -60^\circ$, avec $\delta = 0,02$ m : solution 2.

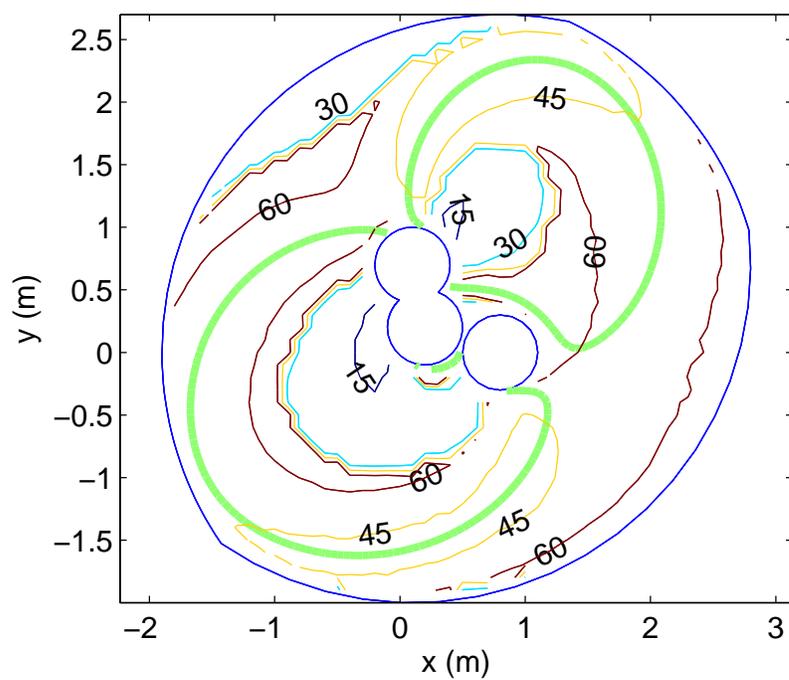


FIG. 6.19 – Variation possible de ϕ pour $\phi = 0^\circ$, avec $\delta = 0,02$ m : solution 1.

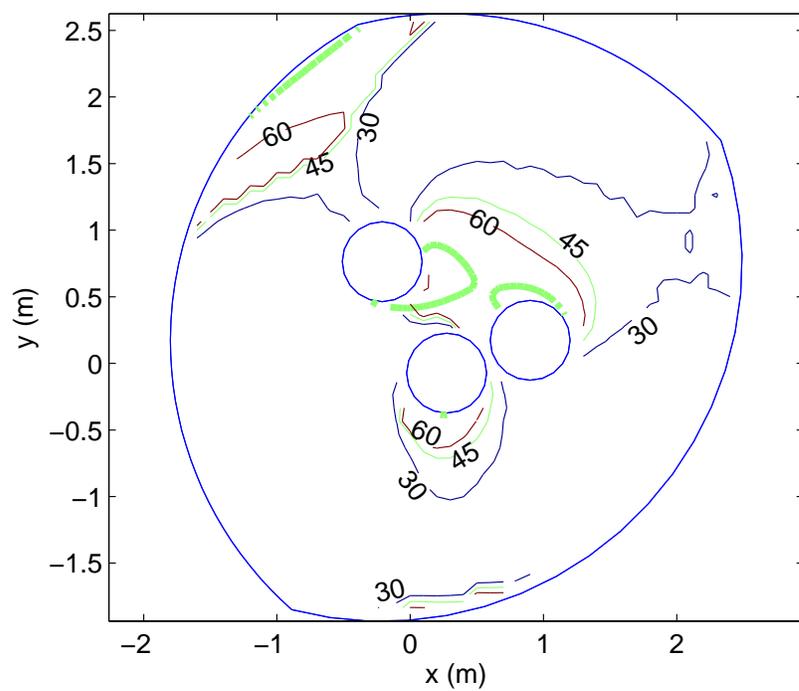


FIG. 6.20 – Variation possible de ϕ pour $\phi = -60^\circ$, avec $\delta = 0,02$ m : solution 1.

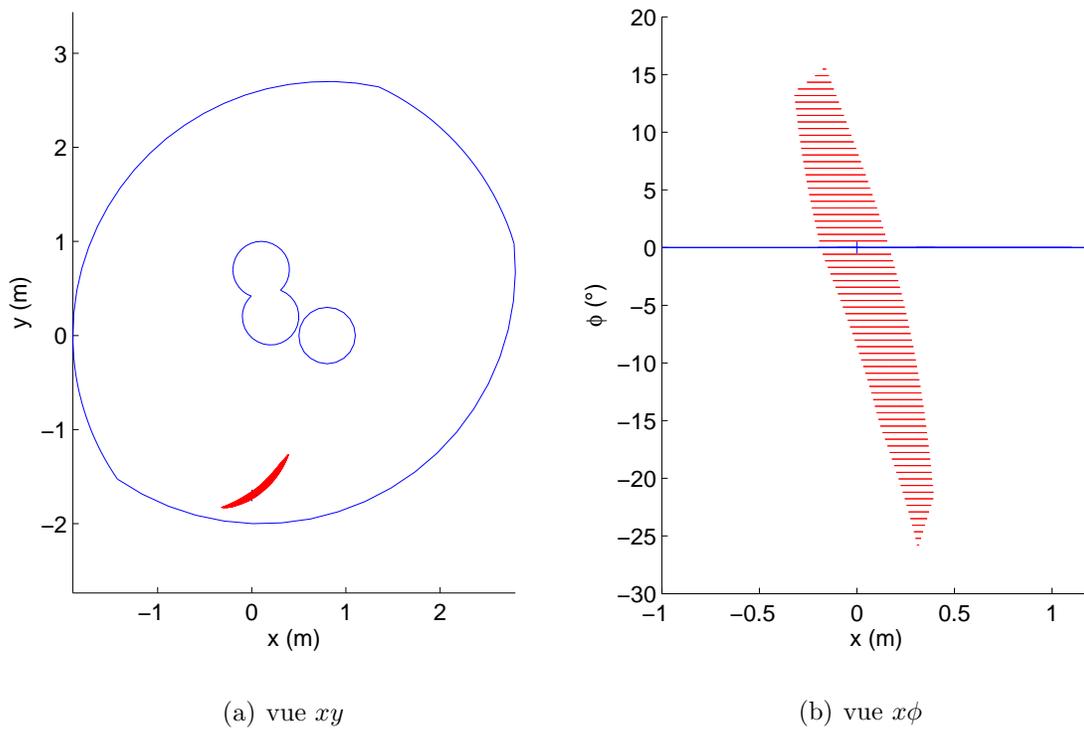


FIG. 6.21 – L'espace d'incertitude correspondant au point $(x, y) = (0, -1,7)$, $\phi = 0^\circ$.

6.2.2 Zones des singularités

Les figures 6.22 et 6.23 montrent, pour des orientations choisies de -60° et de 0° , respectivement, et la solution 1, l'effet de la grandeur du jeu sur l'étendue de la zone des singularités. Les plus petites zones (en jaune) correspondent à un jeu de 0,01 m et les plus grandes (en rouge) correspondent à un jeu de 0,02 m. Les courbes des singularités sont montrées en vert. Les arcs de cercle bleus sont les limites de l'espace de travail. À partir de ces figures, on peut constater qu'un jeu d'une grandeur double n'a pas pour effet de doubler la superficie de la zone des singularités. Il est même surprenant de voir la similitude de la taille des zones. Certaines orientations constantes choisies sont plus vulnérables que d'autres aux effets du jeu et de la flexibilité. L'espace de travail à orientation constante $\phi = -60^\circ$ est utilisable, en majorité, mais il faut surveiller le coin supérieur gauche. Par contraste, la partie utile de l'espace de travail à orientation constante $\phi = 0^\circ$ est presque entièrement disparue.

Ce qui est vrai pour une solution au PGI ne l'est pas nécessairement pour une

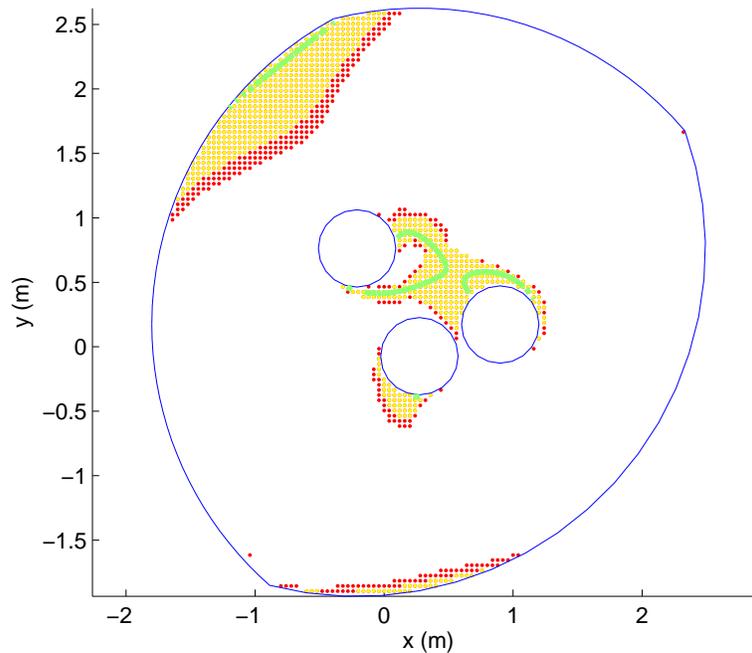


FIG. 6.22 – Courbe des singularités à $\phi = -60^\circ$ et la zone des singularités avec $\delta = 0,01$ m et $\delta = 0,02$ m : solution 1.

autre. Si c'était le cas, on pourrait s'attendre à ce que la solution 2 donne des résultats comparables à ceux présentés pour la solution 1 et que la zone des singularités pour $\phi = -60^\circ$ soit considérablement plus petite que la zone des singularités pour $\phi = 0^\circ$. Les figures 6.24 et 6.25 montrent les zones singulières lorsque le jeu est de 0,01 m, pour les mêmes orientations : $\phi = -60^\circ$ et $\phi = 0^\circ$, respectivement. On observe, pour la solution 2, que l'étendue des zones est comparable dans ces deux cas.

6.2.3 Dégradation de la dextérité et de la raideur

Les figures de cette section contiennent des courbes associées aux caractéristiques du manipulateur dans le cas idéal, ainsi que les courbes correspondant aux mêmes caractéristiques lorsque l'on considère le jeu et la flexibilité (courbes plus épaisses). Il est donc possible d'observer le déplacement des courbes. Ces figures contiennent aussi toutes les courbes des singularités (en vert). Les arcs de cercle bleus sont les limites de l'espace de travail. Les espaces faisant partie de la zone des singularités ont une

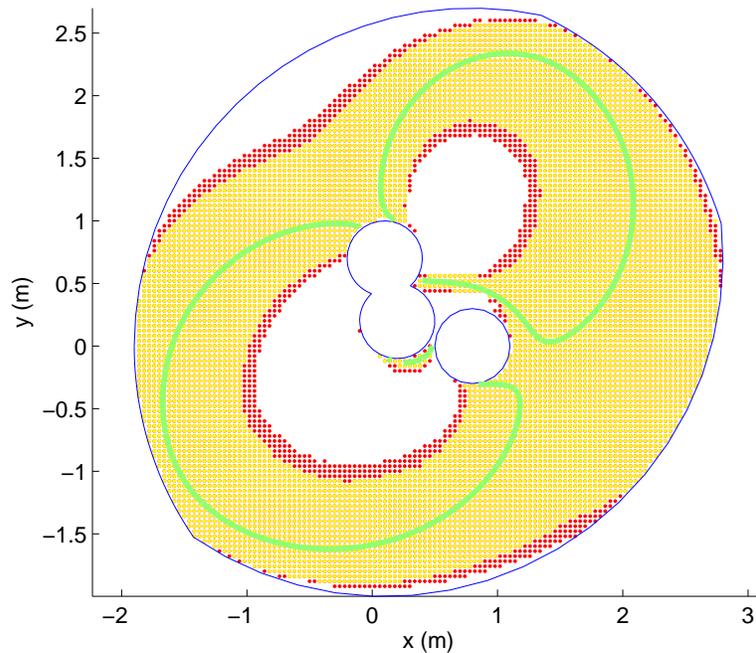


FIG. 6.23 – Courbe des singularités à $\phi = 0^\circ$ et la zone des singularités avec $\delta = 0,01$ m et $\delta = 0,02$ m : solution 1.

dextérité et une raideur nulles.

La solution considérée est la solution 1. Les deux premières figures, 6.26 et 6.27, montrent la variation de la dextérité lorsque la flexibilité et un jeu de 0.01 m sont introduits. Les orientations choisies sont les mêmes : $\phi = -60^\circ$ et $\phi = 0^\circ$, respectivement.

Pour l'orientation choisie $\phi = -60^\circ$, il y a deux endroits dans l'espace de travail où la dextérité est meilleure. En bas, à droite, l'isodextérité correspondant à une valeur de 0.18 disparaît à cause du jeu et de la flexibilité. Dans celui en haut, à gauche, c'est l'isodextérité correspondant à une valeur de 0,15 qui disparaît. Dans cette même région, on observe un assez grand déplacement de l'isodextérité 0,03 vers l'intérieur de l'espace de travail, jusqu'à couper les isodextérités 0,06 et 0,09 qu'il y avait en absence de jeu et de flexibilité. On ne remarque pas ceci ailleurs dans la figure. Il est possible d'expliquer ce qui se passe, à partir de la figure 6.22, qui montre une zone singulière plus forte dans cette région de l'espace de travail.

Pour l'orientation choisie $\phi = 0^\circ$, il y a deux endroits où la dextérité dépasse 0,15

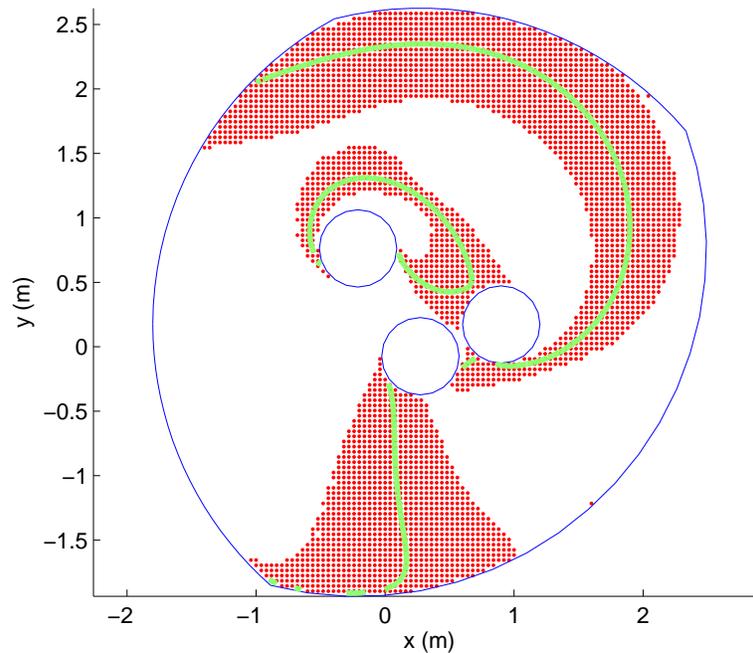


FIG. 6.24 – Courbe des singularités à $\phi = -60^\circ$ et la zone des singularités avec $\delta = 0,01$ m : solution 2.

avant que le jeu et la flexibilité soient introduits. Ces deux isodextérités n’existent plus après leur introduction. Étant donné l’étendue des zones singulières (voir figure 6.23), une faible partie de l’espace de travail correspond à une dextérité supérieure à 0,05, lorsque l’on considère le jeu et la flexibilité, surtout que l’isodextérité 0,05 se trouvant sur le côté droit de l’espace de travail disparaît alors complètement.

Les figures 6.28 et 6.29 montrent la raideur et la diminution de la raideur dans l’espace de travail aux orientations constantes, $\phi = 0^\circ$ et $\phi = -60^\circ$, pour la solution 1 lorsqu’il y a flexibilité et un jeu de 0,01 m. En considérant la raideur seule, il est difficile de choisir laquelle des deux figures représente les meilleurs résultats. Les courbes d’isoraideurs se déplacent plus lorsque $\phi = 0^\circ$. Il faut s’y attendre puisque les espaces d’incertitudes sont en général plus grands pour $\phi = 0^\circ$ que pour $\phi = -60^\circ$. Des plus grands espaces d’incertitudes favorisent un plus grand déplacement des courbes, donc une plus importante dégénérescence des propriétés cinématiques, dextérité et raideur.

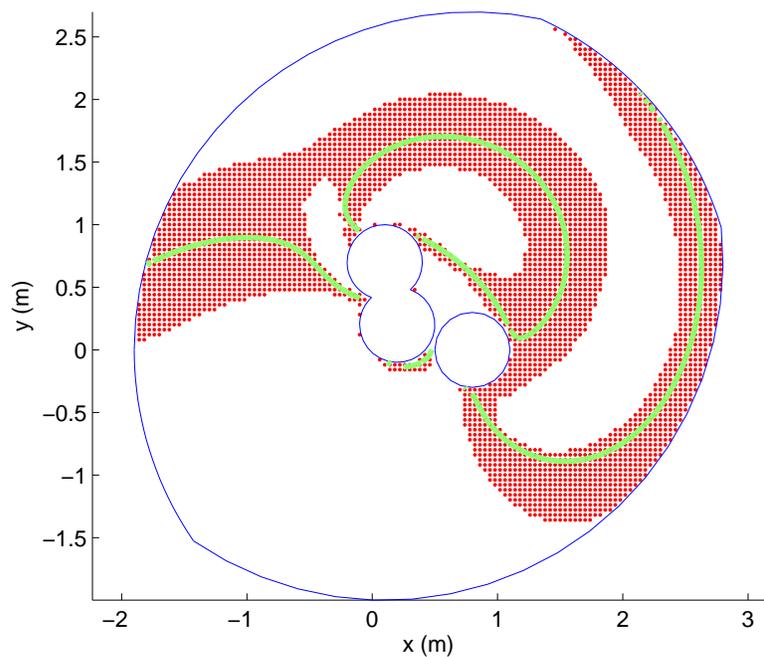


FIG. 6.25 – Courbe des singularités à $\phi = 0^\circ$ et la zone des singularités avec $\delta = 0,01$ m : solution 2.

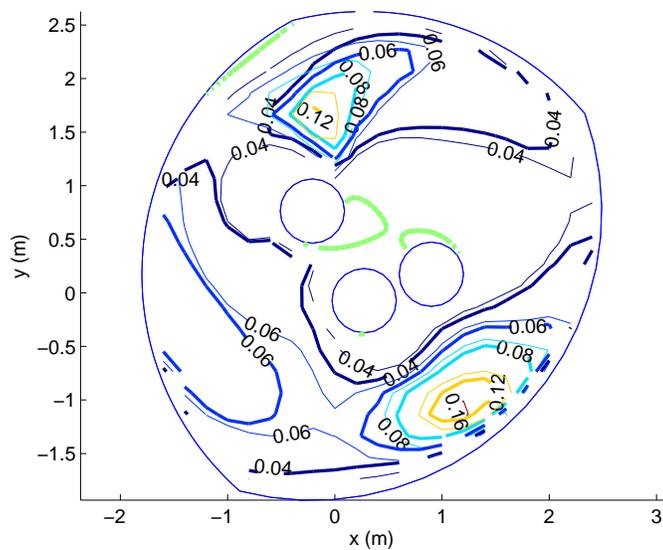


FIG. 6.26 – Dextérité à $\phi = -60^\circ$ sans jeu et sans flexibilité et avec $\delta = 0,01$ m.

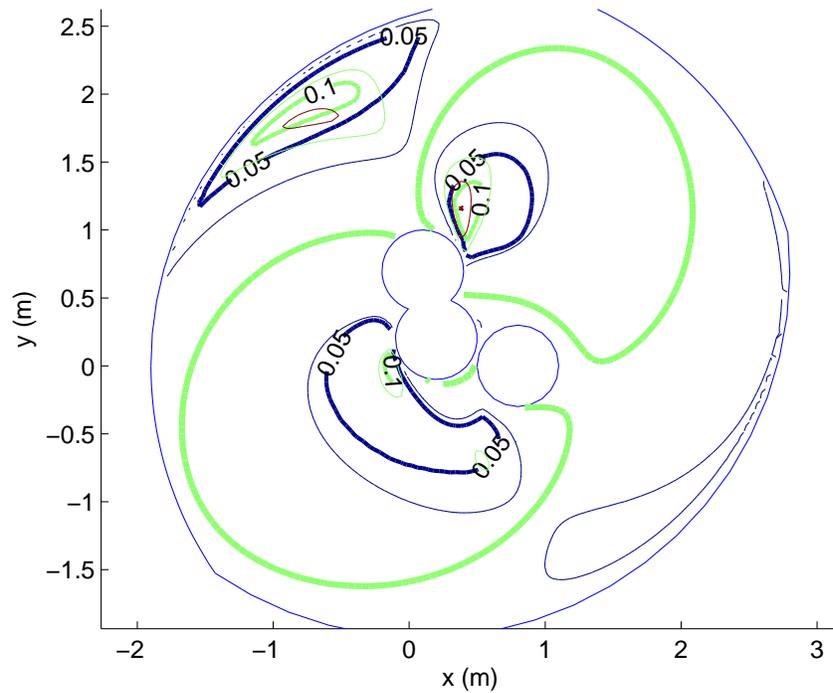


FIG. 6.27 – Dextérité à $\phi = 0^\circ$ sans jeu et sans flexibilité et avec $\delta = 0,01$ m.

6.2.4 Comparaison de la distribution de l'erreur et de la dextérité

Trois boîtes exemptes de singularités ont été choisies pour être discrétisées avec un intervalle de 0,01 m (selon les axes x et y) : la solution 1 avec $\phi = -60^\circ$, la solution 2 avec $\phi = -60^\circ$ et la solution 2 avec $\phi = 0^\circ$. Les boîtes sont montrées à la figure 6.30 qui comprend les courbes d'isodextérités et les courbes des singularités.

À tous ces points, l'erreur maximale (due à un jeu $\delta = 0,01$ m) et la dextérité ont été calculées. La figure 6.31 montre les graphiques de la dextérité tracée en fonction de l'erreur maximale. Les courbes de tendance montre une diminution de dextérité pour une erreur qui augmente. Même si elle existe, la tendance n'est pas très marquée.

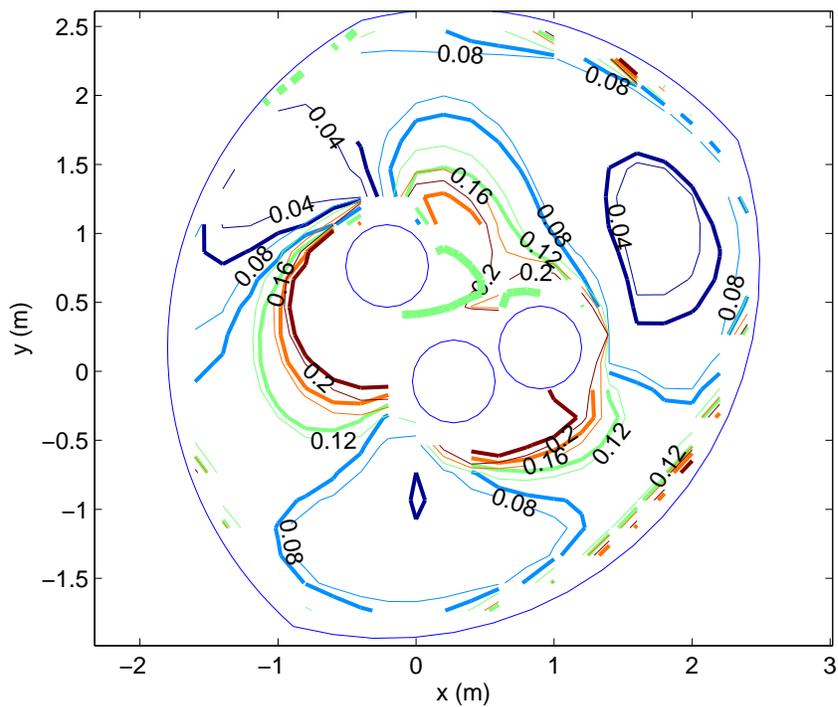


FIG. 6.28 – Raideur à $\phi = -60^\circ$ sans jeu et sans flexibilité et avec $\delta = 0,01$ m.

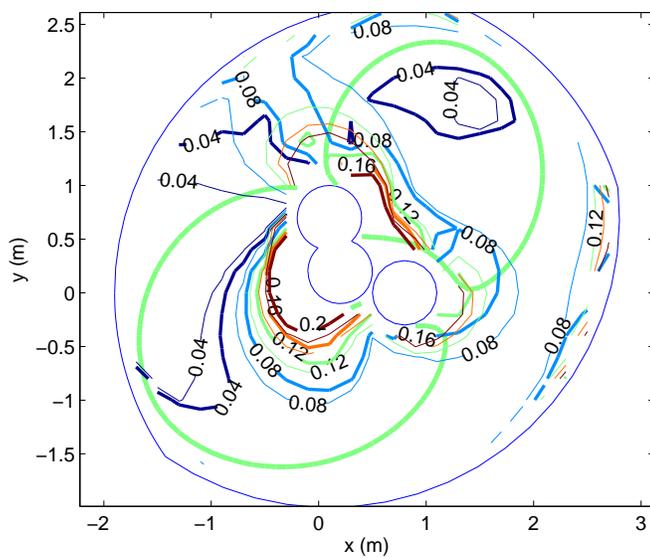


FIG. 6.29 – Raideur à $\phi = 0^\circ$ sans jeu et sans flexibilité et avec $\delta = 0,01$ m.

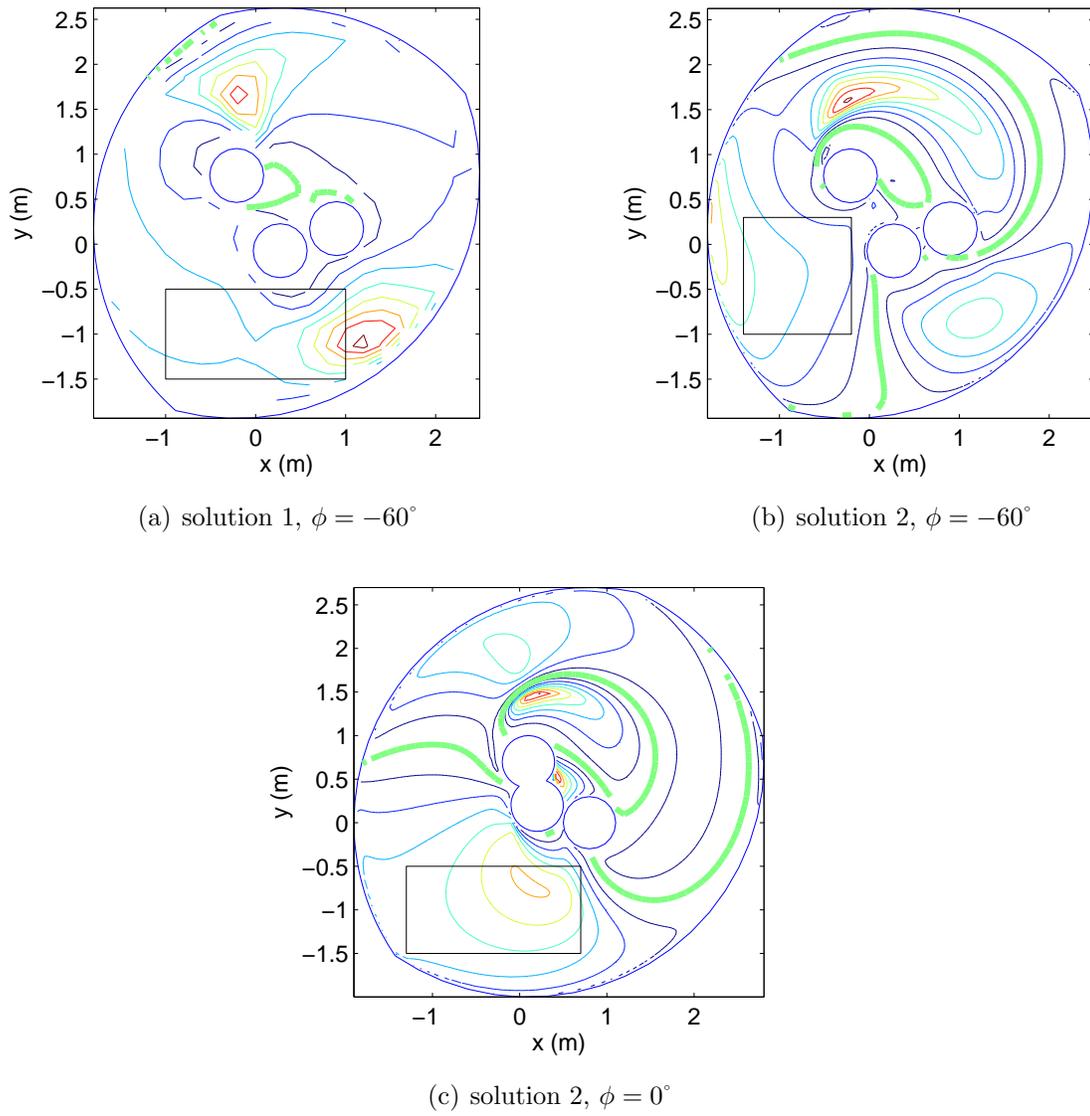


FIG. 6.30 – Les boîtes discrétisées dans les espaces de travail à orientation constante.

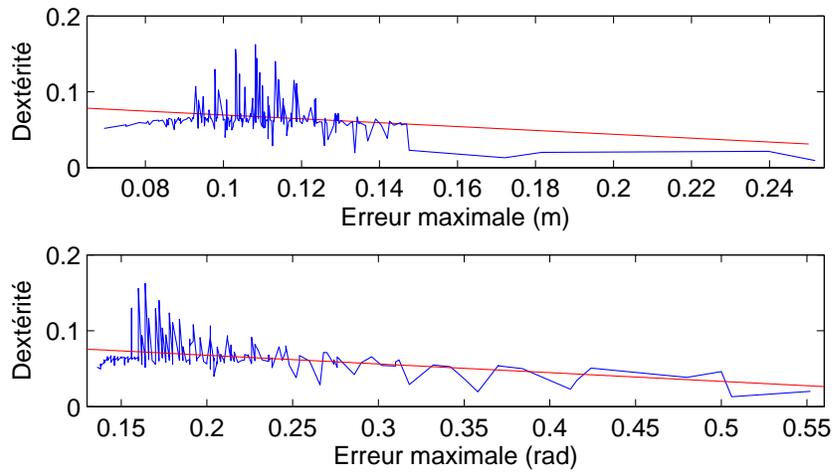
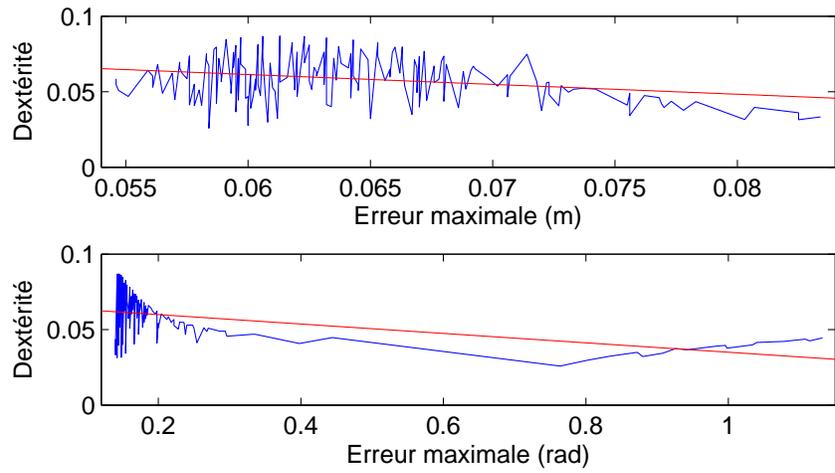
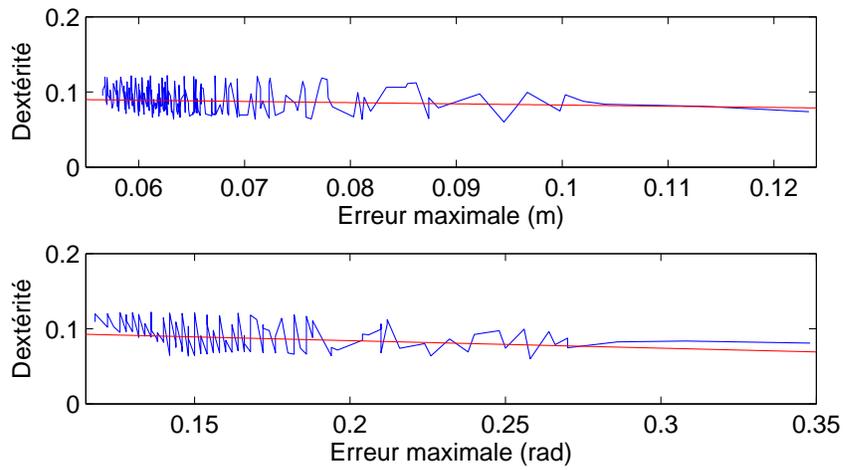
(a) solution 1, $\phi = -60^\circ$ (b) solution 2, $\phi = -60^\circ$ (c) solution 2, $\phi = 0^\circ$

FIG. 6.31 – Dextérité en fonction de l'erreur maximale pour le manipulateur 3-RRR plan.

6.3 Sommaire

Pour deux manipulateurs plans, l'effet du jeu et de la flexibilité sur les propriétés des manipulateurs a été évaluée.

Ces manipulateurs montrent des comportements différents selon la solution choisie au PGI. Pour chacun des manipulateurs, deux solutions ont été comparées. Les résultats obtenus à une solution ne sont pas du tout une bonne indication des résultats qui seront obtenus à une autre solution. Les deux manipulateurs ont démontré ceci.

La sensibilité au jeu et à la flexibilité est variable à l'intérieur de l'espace de travail. Des causes de dégradations plus prononcées des propriétés cinématiques à certains endroits de l'espace de travail ont été identifiées. Par exemple, il est possible de prédire l'étendue de la zone des singularités en regardant la taille et la forme des espaces d'incertitudes qui se trouvent près des courbes des singularités. Si les espaces d'incertitudes ont une forme allongée, et surtout s'ils sont longs et perpendiculaires aux courbes, on aura une zone singulière plus large à cet endroit. Cette observation n'est pas suffisante pour connaître la forme de la zone singulière du manipulateur à trois DDL. Il faut aussi vérifier si les courbes des singularités varient beaucoup pour une faible variation de l'orientation ϕ .

La zone singulière associée aux valeurs $\delta = 0,01$ et $\delta = 0,02$ m a été tracée sur deux différents espaces à orientation constante du 3-RRR. Pour une valeur de δ double, la zone singulière n'a pas pris beaucoup d'expansion.

De la même façon qu'au chapitre précédent, lorsqu'une valeur non-nulle de δ est introduite, les courbes d'isodextérité et les courbes d'isoraideur se déplacent peu si elles ont une valeur élevée et se déplacent davantage pour des valeurs plus faibles. La dégradation des propriétés cinématiques est plus marquée si celles-ci sont déjà faibles. Aussi, les espaces d'incertitudes (et donc les erreurs) sont plus grands s'ils se trouvent à l'intérieur des zones singulières.

Pour chacun des deux manipulateurs, une comparaison de la dextérité et de l'erreur maximale a été effectuée. Dans le cas du 2-RRR, la tendance est claire : la dextérité diminue alors que l'erreur augmente. Dans le cas du 3-RRR, la tendance existe, mais

de façon beaucoup moins marquée que dans le cas précédent.

Chapitre 7

Conclusion

Plusieurs domaines de recherche en robotique se sont rencontrés pour rendre ce travail possible. L'état des connaissances de chacun a été présenté au chapitre 2, ainsi que sa pertinence pour l'atteinte des objectifs. Six manipulateurs connus ont ensuite été présentés dans le chapitre 3. Sans contenir de nouveautés, ce même chapitre comprenait les solutions au PGI, les méthodes d'obtention de l'espace de travail, les équations de vitesse et les méthodes de calcul des propriétés cinématiques.

Ce dernier chapitre comprend deux parties distinctes. La première est basée seulement sur les résultats présentés dans la thèse, alors que la deuxième est une réflexion sur les travaux futurs à considérer pour faire suite à ceux présentés.

7.1 Sommaire et contributions principales

Au chapitre 4, des algorithmes ont été présentés pour l'obtention des zones singulières. Ceux-ci diffèrent selon les chaînes cinématiques qui constituent les pattes d'un manipulateur (actionneurs prismatiques ou rotoïdes). À la base de chaque algorithme est l'obtention des espaces d'incertitudes dus au jeu retrouvé aux articulations rotoïdes passives et à la flexibilité des articulations et des membrures.

La plus grande contribution de cette thèse est l'obtention des zones singulières à l'aide d'algorithmes développés pour chacun des manipulateurs étudiés, individuellement. De tels résultats n'existent pas ailleurs (à la connaissance de l'auteure). Différents travaux, présentés au chapitre 2, portent sur l'identification des singularités, sur l'obtention des courbes singulières et sur l'évitement des singularités (voir sous-section 2.3.1). Malgré leur importance, ces études sont incomplètes pour l'identification de toutes les configurations singulières de manipulateurs réels. Au cours des travaux de cette thèse, une publication a résulté de l'étude et de l'obtention des zones singulières des manipulateurs parallèles plans à deux et à trois DDL avec actionneurs prismatiques [107].

Un des défis à relever consistait à modéliser l'effet de la flexion des membrures proximales des manipulateurs 2-RRR et 3-RRR sur leur espace d'incertitude, le plus simplement possible, de façon à englober toutes les déformations possibles causées par tous les torseurs qui pourraient être appliqués.

La valeur combinée du jeu et de la flexibilité, δ , n'a pas une influence proportionnelle sur l'étendue des zones singulières. Les résultats présentés ont démontré que doubler la valeur de δ n'a pas pour effet de doubler l'étendue de la zone singulière. Au contraire, la superficie et la forme de la zone singulière changent beaucoup moins que l'intuition le supposerait.

Pour un même manipulateur plan à trois DDL (3-RPR ou 3-RRR), certaines orientations constantes correspondent à des espaces de travail ayant de très grandes zones singulières alors que d'autres ont des zones significativement plus restreintes. Ces résultats différents sont dus à la variation plus ou moins prononcée des courbes des singularités pour un petit changement d'orientation ϕ . Les zones singulières sont plus répandues pour une variation brusque des courbes des singularités. Le même phénomène se pro-

duit pour le manipulateur sphérique lorsque ses courbes des singularités se déplacent rapidement pour des petits changements de torsion.

Une autre influence sur la taille de la zone singulière est la forme des espaces d'incertitudes qui se trouvent près des courbes des singularités. Si les espaces d'incertitudes ont une forme allongée, et surtout s'ils sont longs et perpendiculaires aux courbes, la zone singulière sera plus large à proximité de ceux-ci. Ces observations sont utiles particulièrement pour les manipulateurs à deux DDL, surtout que leurs courbes des singularités ne varient pas pour une architecture choisie et une solution choisie (2-RRR). On peut observer, à partir des résultats, que les espaces d'incertitudes (et donc les erreurs) sont plus grands s'ils se trouvent à l'intérieur des zones singulières.

La sensibilité au jeu et à la flexibilité est variable à l'intérieur de l'espace de travail. Des causes de dégradations plus prononcées des propriétés cinématiques à certains endroits de l'espace de travail ont été identifiées. De façon générale, lorsqu'une valeur non-nulle de δ est introduite, les courbes d'isodextérité et les courbes d'isoraideur se déplacent peu si elles ont une valeur élevée et se déplacent plus aux valeurs plus faibles. La dégradation des propriétés cinématiques est plus marquée si celles-ci sont déjà faibles.

Pour chacun des manipulateurs avec actionneurs rotoïdes, deux solutions au PGI ont été comparées. Les résultats obtenus à partir d'une solution ne sont pas une bonne indication des résultats qui seront obtenus à partir de l'autre solution. Il faut étudier chaque solution séparément tel qu'on le ferait avec deux architectures différentes.

La dextérité et l'erreur maximale ont été comparés pour les six manipulateurs étudiés dans cette thèse. Les résultats ont démontré qu'on ne peut pas affirmer qu'une mesure locale de la dextérité suffit à prédire l'erreur locale associée. L'erreur due à un espace d'incertitude n'est pas inversement proportionnelle à la dextérité et peut même être plus faible dans une position de dextérité moindre. Par contre, l'ajout de courbes de tendance a démontré un lien indéniable entre les deux. Il existe une tendance, très nette dans certains cas, d'une augmentation de l'erreur moyenne pour une diminution de la dextérité moyenne. Quelques courbes ne semblent pas avoir de tendance particulière et sont plutôt aléatoires.

7.2 Travaux futurs et directions potentielles de recherche

La question du conditionnement de la matrice jacobienne comme mesure de la précision ne peut pas être adéquatement résolue à partir des résultats dans cette thèse. Puisque c'est seulement très récemment que cette mesure a été contestée, il est probable qu'on verra bientôt des chercheurs s'y intéresser. Pour certains manipulateurs, le calcul de la dextérité et le calcul de l'erreur sont équivalents en temps de calcul dans une boucle d'optimisation. Dans ce cas, il est préférable de choisir le calcul de l'erreur. Pour d'autres manipulateurs, tels que les manipulateurs à trois DDL étudiés dans cette thèse, et probablement un grand nombre d'autres manipulateurs à trois, quatre, cinq ou six DDL, le temps de calcul de la dextérité est incomparablement plus faible et plus simple que le calcul de l'erreur. Les courbes de tendance présentées ont démontré dans plus d'un cas un lien entre la dextérité et la précision. Il reste à déterminer dans quelles mesures et circonstances on peut faire confiance aux résultats si on substitue le calcul de l'erreur pour le calcul de la dextérité.

Le nombre d'architectures étudiées s'est limité à six pour les travaux de cette thèse. Il serait très intéressant d'étudier l'effet du jeu et de la flexibilité sur les propriétés de manipulateurs isotropes. Il serait aussi intéressant de faire l'étude de manipulateurs existants, en service dans des entreprises, ou actifs dans un laboratoire de robotique.

Ce serait utile pour l'étude future de manipulateurs sphériques d'obtenir analytiquement les frontières de l'espace de travail pour un manipulateur non-symétrique, exprimées selon la convention *ZYZ* d'Euler modifiée [29]. Il faut savoir obtenir les frontières d'un manipulateur sphérique non-symétrique pour l'obtention des espaces d'incertitude et finalement de la zone singulière d'un manipulateur sphérique symétrique.

Très peu d'ouvrages existent sur le jeu dans les articulations prismatiques. C'est donc une autre voie à explorer.

Tous les travaux effectués dans cette thèse se sont basés sur un type de modélisation du jeu dans une articulation rotoïde passive, qui consistait à faire varier la longueur des membrures sous l'action de forces de tension et de compression. Cette modélisation est valide pour le type d'assemblage des membrures des manipulateurs : ce sont les

membrures qui avaient les alésages et les pivots fixes qui avaient les goujons (voir figure 4.2). Il serait intéressant de voir l'effet du type d'assemblage sur les résultats. Changer le type d'assemblage correspond ici à échanger, sur deux membrures à assembler, les éléments d'alésage et de goujon qui composent l'articulation rotoïde.

Bibliographie

- [1] J. J. Craig, *Introduction to Robotics : Mechanics and Control*. Pearson Prentice Hall, 3rd ed., 2005.
- [2] J. Angeles, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems : Theory, Methods, and Algorithms*. Springer-Verlag New York, Inc., 1997.
- [3] J.-P. Merlet, C. M. Gosselin, and N. Mouly, “Workspaces of planar parallel manipulators,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 33, no. 1/2, pp. 7–20, 1998.
- [4] R. Matone and B. Roth, “In-parallel manipulators : A framework on how to model actuation schemes and a study of their effects on singular postures,” in *Proceedings of DETC'98*, (Atlanta, Georgia), pp. 1–11, 1998 ASME Design Engineering Technical Conferences, September 1998.
- [5] J.-P. Merlet, *Les robots parallèles*. Hermès, Paris, 2e ed., 1997.
- [6] C. A. Klein and B. E. Blaho, “Dexterity measures for the design and control of kinematically redundant manipulators,” *The International Journal of Robotic Research*, vol. 6, no. 2, pp. 72–83, 1987.
- [7] B. S. Khasawneh and P. M. Ferreira, “Computation of stiffness and stiffness bounds for parallel link manipulators,” *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, vol. 39, no. 2, pp. 321–342, 1999.
- [8] R. Ricard and C. M. Gosselin, “On the determination of the workspace of complex planar robotic manipulators,” *Journal of Mechanical Design*, vol. 120, pp. 269–278, 1998.

- [9] V. Kumar, "Characterization of workspaces of parallel manipulators," *Transactions of the ASME*, vol. 114, pp. 368–375, 1992.
- [10] C. Gosselin, "Determination of the workspace of 6-DOF parallel manipulators," *Journal of Mechanical Design*, vol. 112, pp. 331–336, 1990.
- [11] M. Arsenault and R. Boudreau, "The synthesis of three-degree-of-freedom planar parallel mechanisms with revolute joints (3-RRR) for an optimal singularity-free workspace," *Journal of Robotic Systems*, vol. 21, no. 5, pp. 259–274, 2004.
- [12] R. Boudreau and C. M. Gosselin, "The synthesis of planar parallel manipulators with a genetic algorithm," *Journal of Mechanical Design*, vol. 121, pp. 533–537, 1999.
- [13] C. M. Gosselin and M. Guillot, "The synthesis of manipulators with prescribed workspace," *Journal of Mechanical Design*, vol. 113, pp. 451–455, 1991.
- [14] M. Gallant and R. Boudreau, "The synthesis of planar parallel manipulators with prismatic joints for an optimal, singularity-free workspace," *Journal of Robotic Systems*, vol. 19, no. 1, pp. 13–24, 2002.
- [15] J. Sefrioui and C. M. Gosselin, "Singularity analysis and representation of planar parallel manipulators," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 10, pp. 209–224, 1992.
- [16] J. Sefrioui and C. M. Gosselin, "On the quadratic nature of the singularity curves of planar three-degree-of-freedom parallel manipulators," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 30, no. 4, pp. 533–551, 1995.
- [17] B. Mayer St-Onge and C. M. Gosselin, "Singularity analysis and representation of spatial six-degree-of-freedom parallel manipulators," in *In 5th International Symposium on Advances in Robot Kinematics(ARK)* (J. Lenarcic and V. Parenti-Castelli, eds.), (Portoroz-Bernardin, Slovénie), pp. 389–398, 1996.
- [18] D. Sen and T. S. Mruthyunjaya, "A centro-based characterization of singularities in the workspace of planar closed-loop manipulators," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 33, no. 8, pp. 1091–1104, 1998.
- [19] J. P. Lallemand, A. Goudali, and S. Zeghloul, "The 6-Dof 2-delta parallel robot," *Robotica.*, vol. 15, pp. 407–416, 1997.
- [20] S. Guerry, F. B. Ouezdou, and S. Régnier, "Workspace synthesis of general manipulators," in *Proceedings of the 3rd International Conference on Intergrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering, Forum 2000 Canadian Society for Mechanical Engineering*, (Montreal, Quebec, Canada), 2000.

- [21] S. Dibakar and T. Mruthyunjaya, "Synthesis of workspaces of planar manipulators with arbitrary topology using shape representation and simulated annealing," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 34, pp. 391–420, 1999.
- [22] M. Hayes, "Architecture independent workspace analysis of planar three-legged manipulators," in *Proceedings of the WORKSHOP on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators* (C. M. Gosselin and I. Ebert-Uphoff, eds.), (Quebec City, Quebec, Canada), October 3-4 2002.
- [23] F. Bulca, J. Angeles, and P. J. Zsombor-Murray, "On the workspace determination of spherical serial and platform mechanisms," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 34, pp. 497–512, 1999.
- [24] J. Sefrioui and C. M. Gosselin, "Étude et représentation des lieux de singularité des manipulateurs parallèles sphériques à trois degrés de liberté avec actionneurs prismatiques," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 29, no. 4, pp. 559–579, 1994.
- [25] C. M. Gosselin, J. Sefrioui, and M. J. Richard, "On the direct kinematics of general spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators," *Robotics, Spatial Mechanisms, and Mechanical Systems ASME*, vol. 45, pp. 7–11, 1992.
- [26] I. A. Bonev and C. M. Gosselin, "Analytical determination of the workspace of symmetrical spherical parallel mechanisms," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 22, no. 5, pp. 1011–1017, 2006.
- [27] C. Gosselin and J. Angeles, "The optimum kinematic design of a spherical three-degree-of-freedom parallel manipulator," *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, vol. 111, pp. 202–207, 1989.
- [28] C. Gosselin and J. Angeles, "Singularity analysis of closed-loop kinematic chains," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 6, no. 3, pp. 281–290, 1990.
- [29] I. A. Bonev and J. Ryu, "Orientation workspace analysis of 6-DOF parallel manipulators," in *Proceedings of the 1999 ASME Design Engineering Technical Conference*, (Las Vegas, Nevada), September 12-15 1999.
- [30] I. Bonev, D. Zlatanov, and C. Gosselin, "Advantages of the modified Euler angles in the design and control of PKMs," in *2002 Parallel Kinematic Machines International Conference*, (Chemnitz, Allemagne), pp. 171–188, April 23-25 2002.
- [31] I. A. Bonev and C. M. Gosselin, "Singularity loci of spherical parallel mechanisms," in *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Barcelona, Spain), April 2005.

- [32] V. Parenti-Castelli and S. Venanzi, "On the joint clearance effects in serial and parallel manipulators," in *Proceedings of the WORKSHOP on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators* (C. M. Gosselin and I. Ebert-Uphoff, eds.), (Quebec City, Quebec, Canada), October 3-4 2002.
- [33] C. Innocenti, "Kinematic clearance sensitivity analysis of spatial structures with revolute joints," *Transactions of the ASME*, vol. 124, pp. 52–57, 2002.
- [34] P. Voglewede and I. Ebert-Uphoff, "Application of workspace generation techniques to determine the unconstrained motion of parallel manipulators," *Journal of Mechanical Design*, vol. 126, no. 2, pp. 283–290, 2004.
- [35] C. R. Tischler and A. E. Samuel, "Prediction of the slop in general spatial linkages," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 18, pp. 845–858, 1999.
- [36] O. M. A. Sharfi and M. R. Smith, "A simple method for the allocation of appropriate tolerances and clearances in linkage mechanisms," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 18, no. 2, pp. 123–129, 1983.
- [37] C. Han, J. Kim, J. Kim, and F. C. Park, "Kinematic sensitivity analysis of the 3-UPU parallel mechanism," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 37, pp. 787–798, 2002.
- [38] D. Zlatanov, I. A. Bonev, and C. M. Gosselin, "Constraint singularities of parallel mechanisms," in *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, (Washington, DC), pp. 496–502, 2002.
- [39] R. Di Gregorio and V. Parenti-Castelli, "Mobility analysis of the 3-UPU parallel mechanism assembled for a pure translational motion," in *International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, (Atlanta, USA), pp. 520–525, September 19-23 1999.
- [40] K.-L. Ting, J. Zhu, and D. Watkins, "The effects of joint clearance on position and orientation deviation of linkages and manipulators," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 35, pp. 391–401, 2000.
- [41] M.-J. Tsai and T.-H. Lai, "Kinematic sensitivity analysis of linkage with joint clearance based on transmission quality," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 39, pp. 1189–1206, 2004.
- [42] R. E. Garrett and A. S. Hall, "Effect of tolerance and clearance in linkage design," *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry*, vol. 91, pp. 198–202, 1969.

- [43] P. A. Voglewede and I. Ebert-Uphoff, "Two viewpoints on the unconstrained motion of parallel manipulators at or near singular configurations," in *ICRA*, pp. 503–510, 2002.
- [44] H. H. S. Wang and B. Roth, "Position errors due to clearances in journal bearings," *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, vol. 111, pp. 315–320, 1989.
- [45] V. Parenti-Castelli and S. Venanzi, "Clearance influence analysis on mechanisms," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 40, pp. 1316–1329, 2005.
- [46] J. Hesselbach and A. Raatz, "Pseudo-elastic flexure-hinges in robots for micro assembly," *Proceedings of SPIE*, vol. 4194, pp. 157–167, 2000.
- [47] T.-F. Niaritsiry, N. Fazenda, and R. Clavel, "Study of the sources of inaccuracy of a 3 DOF flexure hinge-based parallel manipulator," in *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, (New Orleans, LA), pp. 4091–4096, April 2004.
- [48] Y. Chen and J. E. McInroy, "Identification and decoupling control of flexure jointed hexapods," in *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (San Francisco), pp. 1936–1941, April 24-28 2000.
- [49] W. Dong, Z. Du, and S. L., "Conceptual design and kinematics modeling of a wide-range flexure hinge-based parallel manipulator," in *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Barcelona), pp. 4042–4047, April 19-22 2005.
- [50] B.-J. Yi, G. B. Chung, H. Y. Na, W. K. Kim, and I. H. Suh, "Design and experiment of a 3-dof parallel micromechanism utilizing flexure hinges," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 19, no. 4, pp. 604–612, 2003.
- [51] B. H. Kang, J. T. Wen, N. G. Dagalakis, and J. J. Goman, "Analysis and design of parallel mechanisms with flexure joints," in *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, (New Orleans), pp. 4097–4102, April 28-30 2004.
- [52] D. Zlatanov, R. G. Fenton, and B. Benhabib, "A unifying framework for classification and interpretation of mechanism singularities," *Journal of Mechanical Design*, vol. 117, pp. 566–572, 1995.
- [53] D. Zlatanov, R. G. Fenton, and B. Benhabib, "Identification and classification of the singular configurations of mechanisms," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 33, no. 6, pp. 743–760, 1998.

- [54] C. M. Gosselin and J. Wang, "Singularity loci of planar parallel manipulators with revolute actuators," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 21, pp. 377–398, 1997.
- [55] A. Ferrand and M. Renaud, "Analyse des points morts d'une plate-forme dite de Stewart," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 33, no. 4, pp. 409–424, 1998.
- [56] B. Dasgupta and T. S. Mruthyunjaya, "Singularity-free path planning for the Stewart platform manipulator," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 33, no. 6, pp. 711–725, 1998.
- [57] P. Voglewede and I. Ebert-Uphoff, "Measuring "closeness" to singularities for parallel manipulators," in *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, (New Orleans, LA).
- [58] M. Husty, M. Hayes, and H. Loibnegger, "The general singularity surface of planar three-legged platforms," in *Advances in Multibody Systems and Mechatronics*, (Gerhard-Mercator-Universität, Duisburg, Germany), pp. 203–214, September 25 1999.
- [59] S. Bhattacharya, H. Hatwal, and A. Ghosh, "Comparison of an exact and an approximate method of singularity avoidance in platform type parallel manipulators," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 33, no. 7, pp. 965–974, 1998.
- [60] B. Dasgupta and T. S. Mruthyunjaya, "Force redundancy in parallel manipulators : Theoretical and practical issues," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 33, no. 6, pp. 727–742, 1998.
- [61] M. Carricato and V. Parenti-Castelli, "Kinematics of a family of translational parallel mechanisms with three 4-DOF legs and rotary actuators," *Journal of Robotic Systems*, vol. 20, no. 7, pp. 373–389, 2003.
- [62] L. Notash, "Uncertainty configurations of parallel manipulators," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 33, no. 1/2, pp. 123–138, 1998.
- [63] J. F. O'Brien and J. T. Wen, "Kinematic control of parallel robots in the presence of unstable singularities," in *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, (Seoul, Korea), May 21-26 2001.
- [64] C. Innocenti and V. Parenti-Castelli, "Singularity-free evolution from one configuration to another in serial and fully-parallel manipulators," *Journal of Mechanical Design*, vol. 120, no. 1, pp. 73–79, 1998.
- [65] K. E. Zanganeh and J. Angeles, "Kinematic isotropy and the optimum design of parallel manipulators," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 16, no. 2, pp. 185–197, 1997.

- [66] C. M. Gosselin, "On the design of efficient parallel mechanisms," in *Comptes-Rendus Advanced Study Institute de l'OTAN : Computational Methods in Mechanics*, vol. 1, (St. Konstantin and Elena, Bulgaria), pp. 157–186, June 16-28 1997.
- [67] M. Kirčanski, "Kinematic isotropy and optimal kinematic design of planar manipulators and a 3-DOF spatial manipulator," *International Journal of Robotics Research*, vol. 15, no. 1, pp. 61–77, 1996.
- [68] F. Gao, X. Liu, and W. A. Gruver, "Performance evaluation of two-degree-of-freedom planar parallel robots," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 33, no. 6, pp. 661–668, 1998.
- [69] C. M. Gosselin and E. Lavoie, "On the kinematic design of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 12, no. 4, pp. 394–402, 1993.
- [70] R. E. Stamper, L.-W. Tsai, and G. C. Walsh, "Optimization of a three DOF translational platform for well-conditioned workspace," in *Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, (Albuquerque, New Mexico), pp. 3250–3255, 1997.
- [71] R. S. Stoughton and T. Arai, "A modified Stewart platform manipulator with improved dexterity," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 9, no. 2, pp. 166–173, 1993.
- [72] R. Vijaykumar, K. J. Waldron, and M. J. Tsai, "Geometric optimization of serial chain manipulator structures for working volume and dexterity," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 5, no. 2, pp. 91–103, 1986.
- [73] J. K. Salisbury and J. J. Craig, "Articulated hands : Force control and kinematic issues," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 1, no. 1, pp. 4–17, 1982.
- [74] C. Gosselin and J. Angeles, "A global performance index for the kinematic optimization of robotic manipulators," *Transactions of the ASME*, vol. 113, pp. 220–226, 1991.
- [75] K. Y. Tsai and S. R. Zhou, "The optimum design of 6-dof isotropic parallel manipulators,"
- [76] A. B. K. Rao, P. V. M. Rao, and S. K. Saha, "Workspace and dexterity analyses of hexaslide machine tools," in *Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, (Taipei, Taiwan), pp. 4104–4109, 2003.

- [77] Y. Lou, G. Liu, and Z. Li, "Randomized optimal design of parallel manipulators," *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, vol. X, no. X, pp. 1–11, 2007.
- [78] X.-J. Liu, J. Wang, and G. Pritschow, "On the optimal kinematic design of the PRRRP 2-DoF parallel mechanism," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 41, pp. 1111–1130, 2006.
- [79] X.-J. Liu, Z.-L. Jin, and F. Gao, "Optimum design of 3-DOF spherical parallel manipulators with respect to the conditioning and stiffness indices," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 35, pp. 1257–1267, 2000.
- [80] S.-G. Kim and J. Ryu, "New dimensionally homogeneous jacobian matrix formulation by three end-effector points for optimal design of parallel manipulators," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 19, no. 4, pp. 731–736, 2003.
- [81] H. Schreiber and C. M. Gosselin, "Analyse et conception d'un manipulateur parallèle spatial à cinq degrés de liberté," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 38, pp. 535–548, 2003.
- [82] F. C. Park and J. W. Kim, "Manipulability of closed kinematic chains," *Journal of Mechanical Design*, vol. 120, pp. 542–548, 1998.
- [83] C. M. Gosselin, "The optimum design of robotic manipulators using dexterity indices," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 9, pp. 213–226, 1992.
- [84] S.-G. Kim, *Three End-Effector Point Coordinate Formulation for Parallel Mechanism Robots*. Thèse de doctorat, Department of Mechatronics, Kwangju Institute of Science & Technology, Korea, 2002.
- [85] G. Pond and J. A. Carretero, "Formulating jacobian matrices for the dexterity analysis of parallel manipulators," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 41, pp. 1505–1519, 2006.
- [86] J. P. Merlet, "Jacobian, manipulability, condition number, and accuracy of parallel robots," *Journal of Mechanical Design*, vol. 128, pp. 199–206, 2006.
- [87] S. Briot and I. A. Bonev, "Accuracy analysis of 3-DOF planar parallel robots," *Mechanism and Machine Theory*, 2007. doi :10.1016/j.mechmachtheory.2007.04.002.
- [88] A. Yu, I. A. Bonev, and P. Zsombor-Murray, "Geometric approach to the accuracy analysis of a class of 3-DOF planar parallel robots," *Mechanism and Machine Theory*, 2007. doi :10.1016/j.mechmachtheory.2007.03.002.

- [89] J. L. Caenen and J. C. Angue, "Identification of geometric and non geometric parameters of robots," in *Proceedings of the 1990 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 2, pp. 1032–1037, May 13-18 1990.
- [90] A. Zeid, "Bond graph modeling of planar mechanisms with realistic joint effects," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 111, pp. 15–23, 1989.
- [91] C. Gosselin, "Stiffness mapping for parallel manipulators," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 6, no. 3, pp. 377–382, 1990.
- [92] W.-k. Kim, B.-J. Yi, and W. Cho, "RCC characteristics of planar/spherical three degree-of-freedom parallel mechanisms with joint compliances," *Transactions of the ASME*, vol. 122, pp. 10–16, 2000.
- [93] W.-T. Chang, C.-C. Lin, and J.-J. Lee, "Force transmissibility performance of parallel manipulators," *Journal of Robotic Systems*, vol. 20, no. 11, pp. 659–670, 2003.
- [94] S. Tang and C.-C. Wang, "Computation of the effects of link deflections and joint compliance on robot positioning," in *Proceedings of the 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 4, pp. 910–915, 1987.
- [95] R. A. Beasley and R. D. Howe, "Model-based error correction for flexible robotic surgical instruments," in *Proceedings of Robotics : Science and Systems*, (Cambridge, USA), June 2005.
- [96] F. Xi, D. Zhang, C. M. Mechefske, and S. Y. T. Lang, "Global kinetostatic modelling of tripod-based parallel kinematic machine," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 39, pp. 357–377, 2004.
- [97] R. Di Gregorio and V. Parenti-Castelli, "Influence of leg flexibility on the kinetostatic behaviour of a 3-DOF fully-parallel manipulator," in *Tenth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, (Oulu, Finland), June 20-24 1999.
- [98] D. Zhang, *Kinetostatic analysis and optimization of parallel and hybrid architectures for machine tools*. Thèse de doctorat, Faculté des études supérieures de l'Université Laval, Québec, 2000.
- [99] N. Simaan and M. Shoham, "Stiffness synthesis of a variable geometry planar robot," *Advances in Robot Kinematics : Theory and Applications*, pp. 463–472, 2002.
- [100] N. Simaan and M. Shoham, "Stiffness synthesis of a variable geometry six-degree-of-freedom double planar parallel robot," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 22, no. 9, pp. 757–775, 2003.

- [101] S.-F. Chen and I. Kao, “Conservative congruence transformation for joint and cartesian stiffness matrices of robotic hands and fingers,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 19, no. 9, pp. 835–847, 2000.
- [102] C. Huang, W.-H. Hung, and I. Kao, “New conservative stiffness mapping for the stewart-gough platform,” in *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, (Washington, DC), pp. 823–828, May 2002.
- [103] S.-F. Chen, “The spatial conservative congruence transformation for manipulator stiffness modeling with coordinate and noncoordinate bases,” *Journal of Robotic Systems*, vol. 22, no. 1, pp. 31–44, 2005.
- [104] A. Weiser and S. E. Zarantonello, “A note on piecewise linear and multilinear table interpolation in many dimensions,” *Mathematics of Computation*, vol. 50, no. 181, pp. 189–196, 1988.
- [105] J.-P. Merlet and D. Daney, “Dimensional synthesis of parallel robots with a guaranteed given accuracy over a specific workspace,” in *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Barcelona, Spain), April 2005.
- [106] R. L. Burden and J. D. Faires, *Numerical Analysis*. Thomson Brooks/Cole, 8th ed., 2005.
- [107] M. Gallant and C. Gosselin, “The effect of joint clearances on the singular configurations of planar parallel manipulators,” in *2003 CCToMM Symposium on Mechanisms, Machines, and Mechatronics*, (St-Hubert, Québec, Canada), May 30th 2003.